



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2009/2010

Tesi di Laurea Specialistica

STUDIO DELLE SISTEMATICHE DEL
CALORIMETRO ELETTROMAGNETICO
DELL'ESPERIMENTO MEG PER
L'OTTIMIZZAZIONE DELLA RICERCA DEL
DECADIMENTO $\mu \rightarrow e\gamma$ CON SENSIBILITÀ A
RAPPORTI DI DECADIMENTO
DELL'ORDINE DI 10^{-13}

CANDIDATO

Alessio Porcelli

RELATORI

Prof. Alessandro Baldini

Dott. Fabrizio Cei

Introduzione

Scopo dell'esperimento MEG è la ricerca del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$. Secondo il Modello Standard delle particelle elementari (SM) questo decadimento è proibito per la conservazione del sapore leptonic, ma è noto sperimentalmente che tale conservazione è violata nel fenomeno delle oscillazioni di neutrino. Con l'introduzione di neutrini massivi nel SM il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ diventa possibile ma con un Branching Ratio (BR) $< 10^{-50}$ e di conseguenza non rivelabile. Numerosi modelli di estensione del SM, in particolar modo quelli di *Grande Unificazione Supersimmetrica*, prevedono invece $\text{BR}_{\mu \rightarrow e\gamma} \sim 10^{-11} \div 10^{-14}$, di poco inferiori al limite attuale dell'esperimento MEGA ($1.2 \cdot 10^{-11}$) [20, 21]. L'osservazione di un decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ sarebbe quindi una segnatura incontrovertibile dell'esistenza di nuova fisica oltre il SM. MEG è attualmente in presa dati e si prefigge nei prossimi anni di raggiungere una sensibilità di $\sim 10^{-13}$.

L'esperimento è affetto da due tipi di eventi di fondo che possono simulare, entro le risoluzioni sperimentali, il decadimento a due corpi tipico del segnale $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$: il fondo correlato dovuto al decadimento radiativo (RMD) del muone ($\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$) ed il fondo accidentale ($\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu + \gamma$) in cui un positrone proveniente dall'usuale decadimento del muone ($\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$) viene osservato in coincidenza casuale con un γ proveniente da RMD o da annichilazione e^+e^- .

Nella regione del segnale il fondo accidentale è dominante; il suo BR effettivo (BR_{acc}) dipende dalla frequenza dei μ che si arrestano nel bersaglio e dalle risoluzioni sperimentali secondo l'espressione: $\text{BR}_{acc} \propto R_\mu \cdot (\Delta\Theta_{e\gamma})^2 \cdot \Delta t_{e\gamma} \cdot (\Delta E_\gamma)^2 \cdot \Delta E_e$, dove $\Delta\Theta_{e\gamma}$ è la risoluzione nell'angolo relativo tra e^+ e γ , $\Delta t_{e\gamma}$ quella della loro coincidenza temporale, ΔE_γ la risoluzione in energia dei fotoni e ΔE_e quella dei positroni. È quindi importante avere un'ottima ricostruzione dell'energia e della traiettoria dei fotoni nel calorimetro, in quanto la dipendenza di BR_{acc} dalla risoluzione di questi parametri è quadratica.

In questa tesi viene presentato uno studio sull'ottimizzazione delle prestazioni del calorimetro a Xenon liquido, utilizzato per rivelare i fotoni, e i risultati preliminari dell'analisi sui dati dell'esperimento nel 2009.

È stato svolto uno studio del calorimetro elettromagnetico, presentato nel capitolo 3, confrontando la simulazione Montecarlo (MC) con i dati reali per cercare di migliorare le prestazioni di questo rivelatore. Per il confronto sono stati utilizzati fotoni monocromatici da 55 e 83 MeV¹. Il Montecarlo di MEG simula molto bene la raccolta totale di carica e la ricostruzione della posizione del fotone, ma la distribuzione della carica raccolta sulle singole facce presenta alcune discrepanze rispetto ai dati. Uno dei punti in cui è possibile migliorare la simulazione è la trattazione delle riflessioni dei fotoni di scintillazione in cui la polarizzazione non è tenuta in conto.

Lo studio delle riflessioni con fotoni polarizzati (*riflessione polarizzata*), descritto nel capitolo

¹I fotoni sono prodotti dal decadimento in volo di π^0 , prodotti a loro volta mediante la reazione di scambio carica $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ (Charge **E**Xchange, CEX) e vengono selezionati in energia richiedendo che siano emessi a 180° l'uno rispetto all'altro tramite la coincidenza con un rivelatore a NaI. Si noti che il fotone a 55 MeV ha energia simile a quella di segnale ($\simeq 53$ MeV).



4 e nelle appendici A e B, ha permesso di migliorare notevolmente (capitolo 5), oltre all'accordo dati-MC faccia per faccia, la stima delle efficienze quantiche (QE) dei fotomoltiplicatori (PMT). Queste ultime vengono ottenute paragonando la carica raccolta sui fototubi in eventi di calibrazione con sorgenti α in posizioni note, alla simulazione MC. Nella ricostruzione degli eventi vengono identificate le sorgenti viste da ciascun PMT e viene misurata la quantità di carica raccolta. Le QE dei singoli fototubi vengono ricavate da un fit lineare delle cariche misurate verso quelle aspettate, sorgente per sorgente.

L'energia dei γ nel calorimetro e.m. viene ricostruita con un algoritmo chiamato *xecenetotal-sum* (XET) che è una somma delle cariche raccolte da tutti i fototubi, ciascuno dei quali viene pesato con opportuni coefficienti ottenuti da una continua calibrazione del calorimetro. La risoluzione ufficiale di MEG è basata su questo algoritmo. Un altro algoritmo indipendente è il *Linear Fit* che in linea di principio dovrebbe fornire risultati migliori. Anch'esso ricostruisce l'energia tramite una somma pesata, ma i coefficienti sono ottenuti dalla simulazione Montecarlo. È quindi necessario disporre di una simulazione MC il più aderente possibile ai dati reali, in modo che i coefficienti da utilizzare per la ricostruzione dell'energia risultino affidabili. Questo algoritmo è stato collaudato nel prototipo del calorimetro di forma parallelepipedica (*Large Prototype*) con ottimi risultati. Il calorimetro di MEG, però, presenta superfici curve e LF non è risultato per ora altrettanto efficace.

Migliorando il Montecarlo con l'introduzione della *riflessione polarizzata* migliorano anche le prestazioni del *Linear Fit* e la risoluzione ottenuta risulta confrontabile con l'algoritmo correntemente usato, anche se XET è ancora leggermente migliore.

La parte finale della tesi (capitolo 6) presenta i risultati preliminari dell'analisi dei dati dell'esperimento raccolti nel 2009. L'analisi è basata su una combinazione delle strategie di *Blinding* e *Likelihood*. Gli eventi che cadono in una regione predefinita del piano $(E_\gamma, \Delta t_{e\gamma})$, denominata *Blinding-Box* (B-B) e centrata intorno a valori previsti dal segnale ($E_\gamma \simeq 53$ MeV, $\Delta t_{e\gamma} \simeq 0$ ns), vengono nascosti e salvati in files separati. Analizzando più volte gli eventi che cadono fuori da questa regione (*Sidebands*), si ottimizzano gli algoritmi di ricostruzione e le procedure di selezione del segnale e si ottengono le *Probability Distribution Function* (PDF) degli eventi di fondo attesi all'interno della B-B. Al termine di questo processo di ottimizzazione, la *Blinding-Box* viene aperta e tramite un'analisi di *Likelihood* basata sull'approccio frequentistico di Feldman & Cousins si ottiene l'intervallo al 90% di livello di confidenza su un possibile BR di segnale.

Mentre la sensibilità dell'esperimento stimata utilizzando gli eventi delle *sideband* è di circa $6 \cdot 10^{-12}$, il limite sperimentale sul $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ ottenuto con i dati preliminari del 2009 è di circa $1.5 \cdot 10^{-11}$.

Nella prima parte della tesi (capitoli 1 e 2) viene discusso l'esperimento MEG, illustrando il quadro teorico-fenomenologico per la ricerca del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ e la struttura dell'apparato di rivelazione. Nella seconda parte (capitoli 3, 4 e 5) viene presentata l'analisi dei dati del calorimetro, illustrando le attuali tecniche per stimare le risoluzioni e la loro ottimizzazione dopo lo studio della *riflessione polarizzata*. La seconda parte si chiude (capitolo 6) con la discussione dei risultati preliminari dell'esperimento sui dati del 2009 e della relativa tecnica di analisi.

Indice

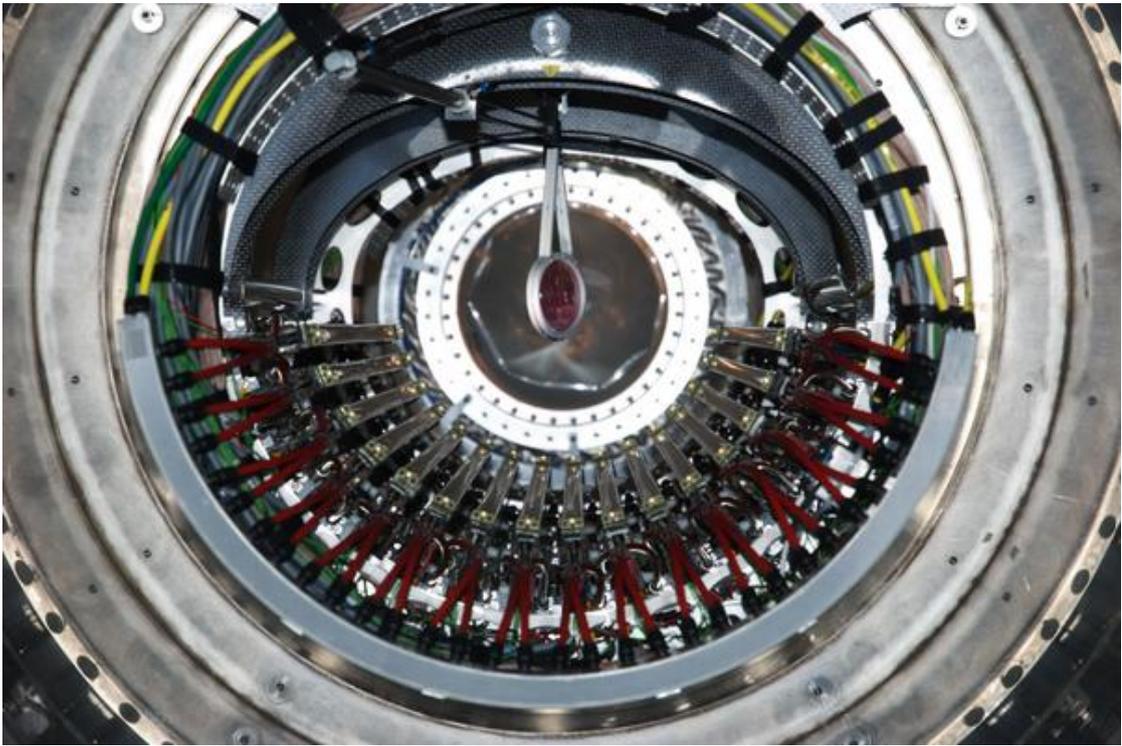
I	L'esperimento	7
1	Quadro teorico fenomenologico	9
1.1	Il decadimento del muone nel modello standard	9
1.1.1	Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ nel SM tenendo conto delle oscillazioni dei neutrini	12
1.2	Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ in schemi che superano il modello standard	13
1.3	Le precedenti ricerche del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$	17
1.4	I fondi per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$	18
1.4.1	Fondo fisico	19
1.4.2	Fondo accidentale	20
	<i>Pile-Up</i> dei fotoni	22
1.5	Sensibilità dell'esperimento MEG	22
2	Apparato Sperimentale	25
2.1	Linea di fascio e bersaglio	26
2.1.1	La linea di fascio $\pi E5$ del PSI	26
2.1.2	Bersaglio per gli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$	28
2.2	Lo spettrometro per la misura dei positroni	29
2.2.1	Il magnete COBRA	29
2.2.2	Le camere a drift	32
2.2.3	Il rivelatore per il tempo dei positroni (Timing Counter)	33
	Calibrazioni del TC	35
2.3	Il calorimetro elettromagnetico a Xenon liquido	36
2.3.1	La struttura del calorimetro e le sue prestazioni	37
	Il <i>Large Prototype</i>	38
2.3.2	La scintillazione dello Xenon	39
2.3.3	Il sistema di calibrazione	41
	Il sistema di LED	41
	Le sorgenti Alpha su filo	42
	L'acceleratore Cockroft-Walton	42
	La reazione di cambio scarica (CEX)	44
	Il generatore di neutroni	45
2.4	Il trigger di MEG	46
2.5	Il sistema di acquisizione dati (DAQ) di MEG	47
2.5.1	Il chip <i>Domino Ring Sampling</i> (DRS)	48



II	Analisi Dati	51
3	I metodi di ricostruzione degli eventi nel calorimetro elettromagnetico	53
3.1	La ricostruzione in tempo e posizione degli eventi	53
3.1.1	L'algoritmo per la ricostruzione in tempo	53
3.2	La ricostruzione in energia	55
3.2.1	Il metodo <i>Xecenetotalsum</i> e la risoluzione energetica relativa	55
3.2.2	Il <i>Linear Fit</i> (LF) e la risoluzione energetica relativa	56
3.2.3	Confronto della carica misurata negli eventi di π^0 con le simulazioni	58
4	Parametrizzazione delle riflessioni con luce polarizzata nel calorimetro	63
4.1	Interfaccia dielettrico-dielettrico	64
4.2	Interfaccia dielettrico-conduttore	66
5	Analisi dei dati tramite l'utilizzo della riflessione con luce polarizzata	71
5.1	Confronto dei dati con le simulazioni MC	71
5.2	Nuova valutazione delle efficienze quantiche e confronto con le vecchie	72
5.2.1	Confronto dati-MC con le nuove efficienze quantiche	73
5.3	Risultati del LF	77
5.4	Possibili nuovi miglioramenti per la comprensione del calorimetro	77
6	Analisi della presa dati del 2009	79
6.1	L'analisi di <i>Likelihood</i> nell'esperimento MEG	80
6.1.1	Il metodo statistico di <i>Feldman & Cousins</i>	80
6.1.2	Determinazione delle funzioni di distribuzione di probabilità (PDF)	80
6.2	Sensibilità dell'esperimento	81
6.3	Analisi all'interno della B-B	81
	Conclusioni	85
A	Teoria della riflessione	87
A.1	Incidenza perpendicolare al piano d'interfaccia tra i due mezzi	87
A.1.1	Polarizzazione perpendicolare	87
A.1.2	Polarizzazione parallela	90
A.2	Incidenza ad angolo qualsiasi sul piano d'interfaccia tra i due mezzi	93
A.2.1	Polarizzazione <i>s</i>	94
A.2.2	Polarizzazione <i>p</i>	96
A.3	Coefficiente di riflessione	97
B	Implementazione delle riflessioni nel montecarlo	101
B.1	Vettore di polarizzazione	101
B.2	Geometria dello scattering Rayleigh	102
B.3	Geometria all'interfaccia	103
B.4	Geometria della riflessione	105
B.5	Problema della rugosità delle superfici	106
	Ringraziamenti	109
	Elenco delle figure	111
	Elenco delle tabelle	112

Parte I

L'esperimento



Capitolo 1

Quadro teorico fenomenologico

Negli ultimi anni la fisica delle particelle elementari ha sviluppato due filoni principali di ricerca: da un lato la produzione di nuove particelle grazie al raggiungimento di energie sempre più elevate nel centro di massa, dall'altro la ricerca e l'eventuale osservazione di canali di decadimento estremamente rari di particelle note.

I due filoni hanno come obiettivo comune quello di eseguire test sempre più stringenti sul Modello Standard, con lo scopo di ottenere importanti conferme (come nel caso delle osservazioni del quark top e dei bosoni W^\pm e Z^0 , la ricerca del bosone di Higgs etc.) o di osservare deviazioni rispetto alle previsioni teoriche nella descrizione delle interazioni fondamentali.

L'osservazione di eventi non previsti dal Modello Standard rende necessario apportare modifiche al modello o introdurre nuove teorie, mentre la non osservazione di tali eventi costituisce un'ulteriore conferma per il Modello Standard e pone vincoli sui parametri liberi delle teorie candidate per la sua estensione.

In questo capitolo iniziale si introdurrà brevemente la teoria legata al decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$, sia nel Modello Standard (paragrafo 1.1) che nelle sue possibili estensioni (paragrafo 1.2), e lo stato attuale della sua ricerca (paragrafo 1.3). Il quadro fenomenologico si concluderà analizzando i fondi (paragrafo 1.4) e la sensibilità (paragrafo 1.5) previste per l'esperimento MEG.

1.1 Il decadimento del muone nel modello standard

Il Modello Standard (SM) è la teoria che racchiude le conoscenze finora raggiunte nella descrizione delle particelle elementari e delle loro interazioni [1]. Questa teoria è basata sul gruppo di simmetria di Gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (rispettivamente Isospin debole ed Ipercarica debole) e descrive le interazioni deboli ed elettromagnetiche, tenendo conto anche dei gradi di libertà interni dei quarks ($SU(3)_C$ di colore). In tale teoria non trovano posto le interazioni gravitazionali. Il SM è stato sottoposto a numerose verifiche sperimentali di alta precisione e le misure sono risultate in ottimo accordo con le previsioni teoriche.

Il modello prevede la classificazione delle particelle elementari in tre gruppi: quark, leptoni e bosoni mediatori dell'interazione. Risulta necessario inoltre introdurre una particella, chiamata bosone di Higgs, non ancora osservata sperimentalmente, che ha il compito di fornire massa alle altre particelle tramite il meccanismo di rottura spontanea della simmetria, conservando la rinormalizzabilità della teoria.

La lagrangiana del SM [1] può essere dunque scritta nella forma:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (1.1)$$



Il primo termine descrive i campi liberi insieme con le loro interazioni e l'accoppiamento al campo di Higgs, il secondo è il potenziale di Higgs ($\mathcal{L}_{Higgs} = \mu^2|H|^2 - \lambda|H|^4$, dove μ e λ sono parametri incogniti) con cui, per effetti di rinormalizzazione del vuoto, i bosoni di Gauge acquistano massa¹, e l'ultimo è l'accoppiamento dei campi fermionici ai termini di massa². Il termine più rilevante nella teoria del decadimento del muone è:

$$\mathcal{L}_{Gauge} = \sum_{SU(3), SU(2), U(1)} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} + i \sum_{q,l} \bar{\psi}_{jk} \gamma^\mu D_\mu \psi_{jk} + |D_\mu H|^2 \quad (1.2)$$

con $F_{\mu\nu}^\alpha$ che rappresenta il tensore del campo di Gauge definito dalla relazione:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu T_\nu^\alpha - \partial_\nu T_\mu^\alpha - c \cdot f_{\alpha\beta\gamma} T_\mu^\beta T_\nu^\gamma \quad (1.3)$$

e D_μ è la derivata covariante definita a sua volta da:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^\alpha}{2} G_\mu^\alpha + ig \frac{\tau^\alpha}{2} A_\mu^\alpha + ig' Q_Y B_\mu \quad (1.4)$$

Nelle formule precedenti sono indicati con:

- ψ_{jk} i bispinori fermionici dei leptoni, con j il numero della famiglia (1,2,3) e k la chiralità (L, R), doppietti in $SU(2)$ ³;
- γ^μ le matrici di Dirac;
- H il doppietto di $SU(2)$ di Higgs $\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$;
- $T_\nu^\mu = \{G_\nu^\mu, A_\nu^\mu, B_\nu^\mu\}$ il campo bosonico di Gauge associato rispettivamente a $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$;
- $f_{\alpha\beta\gamma}$ le costanti di struttura del gruppo considerato, definite dalla relazione $[T^\alpha, T^\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma} T^\gamma$;
- c la costante di accoppiamento (g_s, g, g' rispettivamente per l'interazione forte, debole ed elettromagnetica);
- λ^α ($\alpha = 1, \dots, 8$) note come Matrici di Gell-Mann, τ^α ($\alpha = 1, 2, 3$) note come Matrici di Pauli e $Q_Y = 2 \cdot (Q_{e.m.} - T_3)$ nota come Ipercarica debole (con $Q_{e.m.}$ carica elettrica e T_3 componente 3 dell'Isospin), i generatori dei gruppi $SU(3)$, $SU(2)$ e $U(1)$.

In tabella 1.1 è riportato uno schema riassuntivo delle costanti e dei campi che compaiono nelle interazioni fondamentali del SM.

Sperimentalmente si osserva inoltre che gli autostati di interazione debole dei quark non coincidono con gli autostati di massa. Tale comportamento può essere descritto tramite la matrice unitaria detta di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (V_{CKM}), in cui gli autostati fisici sono espressi come combinazioni lineari degli autostati di sapore:

¹L'invarianza di Gauge non consente la presenza di termini di massa nella Lagrangiana per i bosoni di Gauge, ma bosoni vettori di massa nulla non sono accettabili per le interazioni deboli poiché il loro raggio d'azione è piccolo. Il raggio d'azione di un'interazione è inversamente proporzionale alla massa del propagatore dell'interazione stessa.

²La rinormalizzazione della teoria elettrodebole non consente la presenza di termini di massa nella Lagrangiana dei fermioni, ma sperimentalmente la loro massa è diversa da 0.

³Non esistono neutrini destrorgiri, perciò il campo leptonic destrorgiro è un singoletto e non un doppietto.



Proprietà delle interazioni fondamentali					
Interazione fondamentale	Simmetria di Gauge	Generatori del gruppo	Campo bosonico	Costanti di struttura	Costante di accoppiamento
Forte	$SU(3)$	λ_α	G_μ	$f_{\alpha\beta\gamma}$	g_s
Debole	$SU(2)$	τ_α	A_μ	$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$	g
Elettromagnetica	$U(1)$	Q_Y	B_μ	0	g'

Tabella 1.1: Schema riassuntivo delle grandezze caratteristiche delle interazioni fondamentali nel SM

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

L'accoppiamento dei quark $u_i = \{u, c, t\}$ e $d_j = \{d, s, b\}$ con la corrente debole carica W è dunque regolato dall'elemento di matrice $(V_{CKM})_{ij}$ e viene detto FCCC (**F**lavour **C**hanging **C**urrent). La rispettiva lagrangiana di interazione è esprimibile come:

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{iL}\gamma^\mu(V_{CKM})_{ij}d_{jL}W_\mu^+ + \bar{d}_{iL}\gamma^\mu(V_{CKM})_{ij}u_{jL}W_\mu^-] \quad (1.6)$$

L'analogo meccanismo per la corrente neutra, detto FCNC (**F**lavour **C**hanging **N**eutral **C**urrent), risulta essere fortemente soppresso.

Nel settore leptonic invece il mescolamento di sapore non avviene, a causa della massa nulla dei neutrini, e la lagrangiana per l'interazione debole di corrente carica si può scrivere nella forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_{iL}\gamma^\mu e_{jL}W_\mu^+ + \bar{e}_{iL}\gamma^\mu \nu_{jL}W_\mu^-] \quad (1.7)$$

dove $e_i = \{e, \mu, \tau\}$ e $\nu_j = \{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau\}$.

È chiaro dall'ultima equazione che in questo caso sono conservati sia il numero leptonic totale (come per i quarks), sia il numero leptonic delle singole famiglie, per cui il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ è proibito. Poiché gli unici leptoni più leggeri del muone sono l'elettrone ed i neutrini, l'unico canale di decadimento consentito dalla conservazione dell'energia e del numero leptonic è il processo $\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$. Inoltre, essendo la massa del muone molto inferiore a quelle dei bosoni di Gauge, per il decadimento del μ la lagrangiana fermionica (1.7) può essere approssimata con la lagrangiana di Fermi a quattro fermioni:

$$\mathcal{L}_{Fermi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\mu}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\nu_\mu\bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma^5)\nu_e + h.c.] \quad (1.8)$$

È possibile inoltre l'emissione di un fotone o di una coppia e^+e^- per Bremsstrahlung interno. In tabella 1.2 sono riassunti i possibili modi di decadimento del muone con i relativi BR [2].

Decadimento		BR(%)
Michel	$\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$	≈ 100
Radiativo	$\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$	1.4 ± 0.4 ($E_\gamma > 10$ MeV)
Dalitz	$\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu e^+e^-$	$(1.4 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}$

Tabella 1.2: Canali del decadimento del μ^+ .



1.1.1 Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ nel SM tenendo conto delle oscillazioni dei neutrini

Abbiamo discusso finora il SM minimale, in cui si considera il neutrino come una particella a massa nulla. Recenti evidenze sperimentali hanno però dimostrato il fenomeno delle oscillazioni dei neutrini che richiede una massa dei ν non nulla e di un accoppiamento fra ν di sapore diverso. Tale fenomeno viene osservato in esperimenti che rivelano sia una diminuzione del flusso di neutrini di un determinato sapore ad una certa distanza dalla sorgente, sia distorsioni spettrali nell'intervallo di energia a cui l'esperimento è sensibile. Le sorgenti sono molteplici: reattori nucleari (KamLAND [3]), acceleratori (K2K [4]), il sole (SuperKamiokande [5], SNO [6]), Gallex [7], Borexino [8]), raggi cosmici (SuperKamiokande [9], MACRO [10], SOUDAN [11])⁴.

Le oscillazioni dei neutrini hanno origine dal fatto che l'evoluzione temporale dell'Hamiltoniana (H) avviene secondo gli autostati di massa, mentre le interazioni deboli coinvolgono gli autostati del sapore leptonic, che sono combinazioni lineari degli autostati di H ⁵. È possibile dunque introdurre una matrice di mescolamento dei neutrini in maniera del tutto analoga a quanto avviene per i quark. La matrice unitaria di mescolamento, detta di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata, è definita dalla relazione:

$$\nu_l = \sum_k (U_{PMNS})_{lk} \nu_k \quad (1.9)$$

dove $l = \{e, \mu, \tau\}$ sono gli autostati di sapore e $k = \{1, 2, 3\}$ gli autostati di massa.

Per semplicità consideriamo uno schema con due soli autostati di massa e due di sapore, nel quale la matrice unitaria di mescolamento diventa una rotazione definita da un angolo θ . La relazione che lega gli autostati di massa (ν_1, ν_2) a quelli di sapore (ν_e, ν_α) è esprimibile come [1]:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\alpha \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

La probabilità di oscillazione tra due diversi autostati di sapore, in questo caso, può essere scritta come:

$$P(\nu_l \rightarrow \nu_{l'}) \simeq \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta m^2 (\text{eV}^2) L (m)}{E (\text{MeV})} \right) \quad (1.11)$$

dove $\Delta m^2 = m_l^2 - m_{l'}^2$ è la differenza dei quadrati delle masse degli autostati di H , L è la distanza percorsa dai neutrini ed E è la loro energia. Si noti che l'esistenza delle oscillazioni di neutrino è una prova sperimentale del fatto che la massa dei neutrini non è nulla; in caso contrario infatti la probabilità (1.11) si annullerebbe anche per $\sin^2(2\theta) > 0$. Il settore di oscillazione più interessante per l'esperimento MEG è quello dei neutrini solari ($\nu_e \leftrightarrow \nu_\alpha$) in cui è prevalente l'accoppiamento fra gli autostati di massa 1 e 2 (per i neutrini atmosferici invece è prevalente l'accoppiamento fra gli autostati di massa 2 e 3). Le regioni ammesse per i parametri che descrivono queste oscillazioni sono state misurate dagli esperimenti condotti con neutrini solari e con neutrini prodotti da reattori nucleari.

L'introduzione di neutrini massivi ed oscillazioni di neutrino nel SM rende possibile il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ tramite i diagrammi di figura 1.1, in cui un bosone W , emesso in un vertice (W, μ, ν_μ), viene riassorbito in un vertice (W, e, ν_e) a seguito dell'oscillazione $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$.

La larghezza di decadimento del processo $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ nel SM così esteso, può essere calcolata [13] e risulta dipendere dal parametro θ (angolo di mixing tra i neutrini autostati di massa 1 e 2) e da Δm^2 definito nella (1.11) secondo la formula:

⁴Di recente l'esperimento OPERA ha riportato la prima osservazione diretta di $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ [12].

⁵In altre parole l'operatore L del numero leptonic non commuta con H .

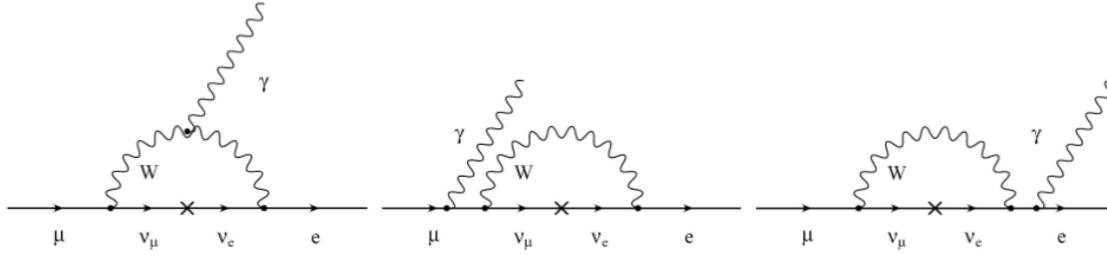


Figura 1.1: I possibili diagrammi di Feynmann per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ nello Standard Model.

$$\Gamma_{\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma} = \frac{1}{16} \frac{G_F^2 m_\mu^5}{128\pi^3} \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{M_W^2} \right)^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (1.12)$$

Nella relazione precedente si è tenuto conto del fatto che nello schema a tre neutrini del SM sussiste l'uguaglianza $\sum_i |U_{ei}^2 U_{\mu i}^2| = \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$. Per calcolare il BR del processo è necessario normalizzare il risultato alla larghezza totale del muone $\Gamma_{tot} = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$. Inserendo il valore della massa del bosone W e della costante di struttura fine e lasciando indicati i parametri Δm^2 e $\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$, si ricava:

$$\text{BR}_{(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma)|_{\text{SM}}} = 5 \cdot 10^{-48} [\Delta m^2 (\text{eV}^2)]^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \quad (1.13)$$

Usando nell'equazione (1.13) i valori misurati dall'esperimento KamLAND ($\Delta m^2 = 7.59 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ e $\sin(2\theta) = 0.87$, entrambi al 95% di C.L.) si ottiene $\text{BR}_{(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma)|_{\text{SM}}} \sim 10^{-55}$, livello non raggiungibile sperimentalmente.

1.2 Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ in schemi che superano il modello standard

Le teorie di Gauge con rottura spontanea di simmetria, formulate negli anni '70 come possibili candidate per la descrizione e l'unificazione delle interazioni elettromagnetiche e deboli hanno trovato conferma nella scoperta delle correnti neutre e dei bosoni vettori W^\pm e Z^0 . A questo gruppo di modelli appartiene la teoria di Glashow-Weinberg-Salam che descrive le interazioni elettrodeboli fino alla scala di energia di 100 GeV, cioè il Modello Standard che abbiamo sommariamente descritto in precedenza. Nonostante il suo notevole successo, il Modello Standard presenta però una serie di problematiche di natura teorica tuttora irrisolte [14]:

1. i campi di Gauge delle forze sono introdotti con costanti di accoppiamento arbitrarie che non sono predette dalla teoria, ma devono essere ricavate sperimentalmente;
2. quark e leptoni sono organizzati in doppietti il cui numero di famiglie non è predetto teoricamente;
3. la teoria non giustifica le grandi differenze di massa tra i leptoni carichi;
4. i coefficienti di mescolamento della matrice V_{CKM} non sono dedotti dalla teoria, ma devono essere misurati sperimentalmente;



5. il valore di aspettazione nel vuoto del campo di Higgs è introdotto ad hoc; inoltre il calcolo delle correzioni alla massa di tale particella contiene termini divergenti con *loop* fermionici (si veda più avanti la figura 1.2 a sinistra);
6. la gravità non viene inclusa nel modello.

Per ovviare a queste incongruenze, nel corso degli anni sono state proposte molte teorie che estendono l'unificazione operata nel SM. Tra le principali si ricordino [14] le teorie di *Grande Unificazione* (GUT), le teorie *Supersimmetriche* (SUSY), la *Supergravità*, i modelli di *Kaluza-Klein* e la più recente teoria delle *Superstringhe* che si prefigge di unificare la gravità con le altre interazioni. Solo tramite una serie di esperimenti sarà possibile stabilire se una di esse, o una loro combinazione, risulta essere rilevante nella descrizione della fisica ad energie sopra la scala dell'unificazione elettrodebole.

L'estensione più naturale del SM è costituita dalle teorie GUT [14], nelle quali il gruppo di simmetria $SU(3)_C \times U(2)_L \times U(1)_Y$ dell'unificazione elettrodebole alla scala di energie della massa del bosone Z^0 è un sottogruppo di una teoria di Gauge più vasta, che ipotizza l'unificazione delle forze elettrodebole e forte ad una scala di energie superiore ($M_G \approx 10^{15}$ GeV). I gruppi di simmetria degli schemi GUT non prevedono distinzioni tra quark e leptoni, facendo decadere automaticamente le conservazioni separate del numero barionico, del sapore e del numero leptonico previste invece nel SM. Inoltre queste teorie superano difficoltà concettuali, quali la quantizzazione della carica elettrica e la relazione tra le cariche dei leptoni e dei quarks, ed introducono una costante di accoppiamento unificata g_G da cui discendono tutte le altre alle opportune scale di energia. Le teorie GUT prevedono infine il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$, anche se con una soppressione di un fattore $\approx \frac{1\text{GeV}}{M_G} \sim 10^{-15}$ che rende il $\text{BR}_{\mu \rightarrow e\gamma}$ non misurabile sperimentalmente. Rimangono irrisolte le problematiche legate ai termini divergenti nel calcolo delle correzioni alla massa del campo di Higgs.

Le teorie dette Supersimmetriche (SUSY) [14] sono estremamente interessanti poichè introducono meccanismi in grado di risolvere i problemi legati alla massa del bosone di Higgs e predicono elevati BR per i processi che violano la conservazione del sapore leptonico [15]. Esse associano ad ogni campo elementare del SM un campo SUSY⁶ che ha gli stessi numeri quantici interni ad eccezione del valore dello spin. Ai campi fermionici sono associati campi bosonici SUSY di spin 0 e ai campi bosonici sono associati campi fermionici SUSY di spin 1/2. Esempi di particelle del SM e dei campi SUSY corrispondenti sono riportati in tabella 1.3.

Un effetto della presenza delle sparticelle è quello di annullare le divergenze nei termini di correzione alla massa del campo di Higgs ad ogni ordine grazie al del diverso spin rispetto alle particelle SM, come illustrato in figura 1.2. Le teorie supersimmetriche prevedono anche l'esistenza di sparticelle stabili, debolmente interagenti con la materia, considerate tra i candidati più probabili per formare la materia oscura ($\tilde{\chi}^0$).

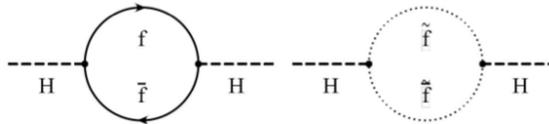


Figura 1.2: Diagrammi di Feynman per le correzioni ai termini di massa del bosone di Higgs: a sinistra diagramma divergente all'interno del SM, a destra quello introdotto all'interno delle teorie SUSY che annulla la divergenza precedente.

⁶Le particelle supersimmetriche vengono comunemente chiamate *sparticelle* (ad esempio il partner supersimmetrico dell'elettrone è il selettrone), mentre i partner supersimmetrici dei bosoni di Gauge, *gaugini*.



Particelle SM	Spin	Particelle SUSY	Spin
Particelle:		Sparticelle:	
quark (q)	1/2	squark(\tilde{q})	0
leptoni (l)	1/2	sleptoni(\tilde{l})	0
Bosoni di gauge:		Gaugini:	
gluoni (G)	1	gluino (\tilde{G})	1/2
W^\pm, Z^0, γ	1	wino (\tilde{W}^\pm), zino (\tilde{Z}), fotino ($\tilde{\gamma}$),	1/2
Bosone di Higgs (H)	0	Higgsino (\tilde{H})	1/2
		autostati combinati tra gaugini e \tilde{H} :	
		chargino ($\tilde{\chi}_i^\pm, i = 1, 2$),	1/2
		neutralino ($\tilde{\chi}_i^0, i = 1, 2, 3, 4$)	1/2

Tabella 1.3: Particelle del SM e rispettive particelle SUSY nell'estensione minimale Supersimmetrica del Modello Standard (SSMM)

Combinando l'ipotesi di grande unificazione con gli schemi supersimmetrici si ottengono le *Teorie Supersimmetriche di Grande Unificazione* (SUSY-GUT), che sono validi candidati per l'estensione del SM fino alla scala di energie $\sim M_G$. Tra le teorie SUSY-GUT esistenti due sono quelle piú importanti:

- $SU(5)$, che possiede il gruppo di Gauge minimale
- $SO(10)$, prodotta dal gruppo $SU(5) \times U(1)$ e che consente di introdurre anche il campo del neutrino destro-giro

Nel caso della teoria $SU(5)$ SUSY-GUT il processo $\mu \rightarrow e\gamma$, illustrato in figura 1.3, nasce da *loops* con correzioni radiative di particelle supersimmetriche, con mescolamento degli sleptoni originato da termini fuori diagonale della matrice di massa [15, 16].

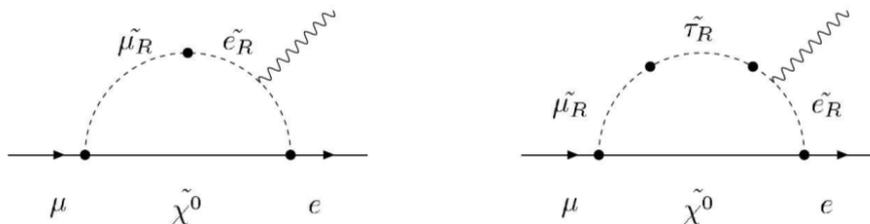


Figura 1.3: Diagramma di Feynman per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ all'interno dello schema $SU(5)$ SUSY-GUT. Al processo partecipano le particelle supersimmetriche \tilde{e}_R (seletrone), $\tilde{\mu}_R$ (smuone), $\tilde{\tau}_R$ (stau), $\tilde{\chi}^0$ (neutralino).

In figura 1.4 vengono riportati i valori attesi per il $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ nel modello $SU(5)$ SUSY-GUT in funzione della massa del selettrone destrogiro al variare della massa del gaugino M_2 e del rapporto dei due valori di aspettazione sul vuoto dei campi di Higgs ($\tan \beta = \langle H_2^0 \rangle / \langle H_1^0 \rangle$) per valori assegnati del parametro μ contenuto nel potenziale di Higgs e di A_0 [17].

Nel caso della teoria $SO(10)$ SUSY-GUT esiste un ulteriore meccanismo di violazione del sapore leptonic, indipendente dal precedente. In questa teoria infatti viene introdotto il campo del neutrino destro-giro ed un meccanismo, di tipo *See-Saw*, che produce una grande massa (scala GUT) per questo neutrino. In questo schema è quindi possibile giustificare anche le piccole

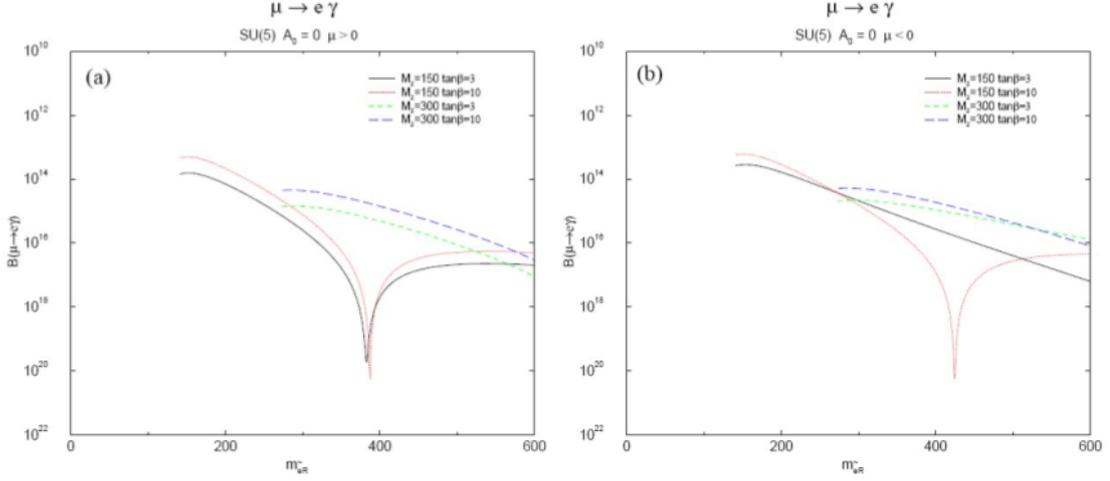


Figura 1.4: Previsioni sul rapporto di decadimento di $\mu \rightarrow e\gamma$ in funzione della massa del selettone destro-giro $m_{\tilde{e}_R}$ per parametri tipici della teoria $SU(5)$ SUSY-GUT.

masse dei neutrini levigati rispetto a quelle dei leptoni carichi e prevedere le loro oscillazioni [18]. Nello schema $SO(10)$ SUSY-GUT il valore del $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ diventa funzione della massa del neutrino destro-giro, oltre che della particolare matrice di massa (U_{PMNS}) dei neutrini presa in considerazione. In figura 1.5 vengono riportati i valori attesi per il $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ nel caso di $SO(10)$ in funzione della massa del selettone destro-giro al variare degli stessi parametri (M_2 , $\tan \beta$, μ , A_0) utilizzati nel caso di $SU(5)$ SUSY-GUT [17].

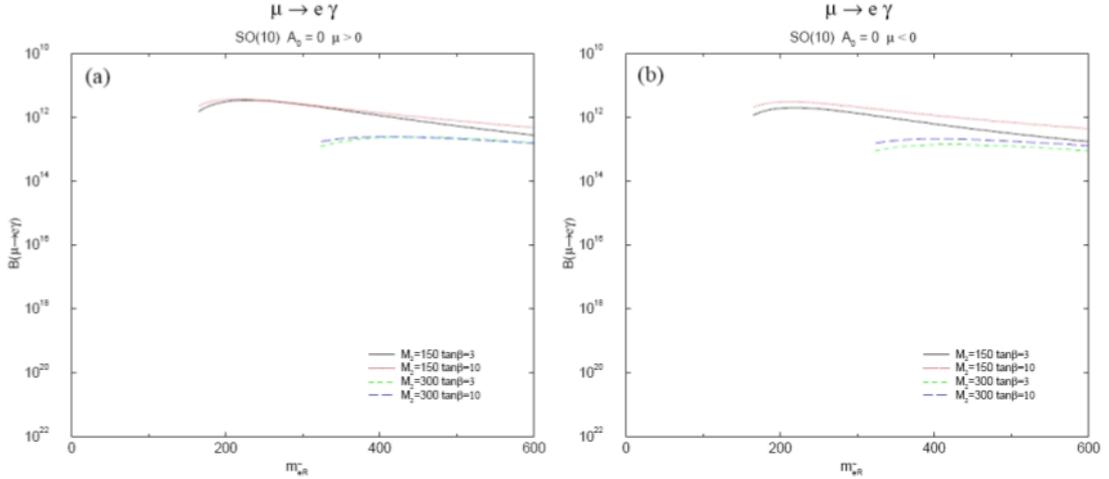


Figura 1.5: Previsioni sul rapporto di decadimento di $\mu \rightarrow e\gamma$ in funzione della massa del selettone destro-giro $m_{\tilde{e}_R}$ per parametri tipici della teoria $SO(10)$ SUSY-GUT.

In conclusione il limite sperimentale che si propone di raggiungere l'esperimento MEG si trova in una regione molto vicina al $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ predetto teoricamente dai modelli SUSY-GUT. L'esperimento potrebbe quindi dare un fondamentale contributo nell'evidenza della violazione del sapore leptonico e di fisica oltre il modello standard. Si noti peraltro che anche una non



osservazione del fenomeno sarebbe comunque di grande importanza per porre limiti stringenti ai parametri liberi delle nuove teorie.

1.3 Le precedenti ricerche del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$

Come evidenziato nei capitoli precedenti, la rivelazione di un processo di *Lepton Flavour Violation* (LFV) rappresenterebbe un'evidenza incontrovertibile di nuova fisica oltre il SM. Dal punto di vista sperimentale i processi di LFV che coinvolgono i muoni sono particolarmente interessanti, grazie soprattutto alla relativa semplicità di ottenere flussi intensi di muoni di bassa energia ($\sim 10^{14} \div 10^{15}$ μ in un anno) [19], alla vita media relativamente lunga del muone stesso ($\tau \simeq 2.197 \cdot 10^{-6}$ s [2]) ed al fatto che gli stati finali sono molto semplici e con una chiara segnatura.

I processi LFV più importanti nel canale dei muoni possono essere divisi in tre categorie:

1. decadimenti diretti del μ^+ ($\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ o $\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$)⁷;
2. conversione del muone in elettrone nel campo di nuclei pesanti quali l'Alluminio, il Titanio o l'Oro⁸;
3. conversione muonio-antimuonio.

Processo	Limite attuale (90% C.L.)	Riferimenti
$\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$	$< 1.2 \cdot 10^{-11}$	[20, 21]
$\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$	$< 1.0 \cdot 10^{-12}$	[22]
$\mu^- \text{Au} \rightarrow e^- \text{Au}$	$< 7 \cdot 10^{-13}$	[23]
$\mu^+e^- \rightarrow \mu^-e^+$	$< 8.3 \cdot 10^{-11}$	[24]

Tabella 1.4: Limiti per il rapporto di decadimento di processi di LFV con muoni.

Gli attuali limiti dei rapporti di decadimento o conversione per i processi LFV considerati, normalizzati al singolo evento, sono elencati in tabella 1.4. Nel modello proposto da Kuno-Okada [25], le predizioni sulle ampiezze SUSY-GUT relative dei processi LFV ora considerati sono:

$$\frac{\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+}}{\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma}} \approx 10^{-2} \quad \frac{\text{BR}_{\mu^- N \rightarrow e^- N}}{\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma}} \approx 5 \cdot 10^{-3} \quad (1.14)$$

(si noti peraltro che i rapporti (1.14) variano di $1 \div 2$ ordini di grandezza a seconda del modello).

Dalla tabella 1.4 e dalla (1.14), si comprende perchè il processo $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ sia il più studiato. I primi ad effettuare un esperimento per la ricerca di tale decadimento furono Hincks e Pontecorvo nel 1947 che, utilizzando i raggi cosmici, posero un primo limite superiore per il rapporto di decadimento: $\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma} < 10\%$.

Nel corso degli anni, grazie all'uso di fasci prodotti artificialmente e di tecnologie sempre più raffinate, il limite è stato più volte migliorato fino a raggiungere il valore attuale di $\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma} \leq 1.2 \cdot 10^{-11}$ [20, 21]. L'evoluzione temporale del limite ottenuto nella ricerca del decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ è rappresentato in figura 1.6 e in tabella 1.5 sono riportate le risoluzioni dei vari esperimenti, confrontate con le risoluzioni di progetto di MEG.

⁷i μ^- hanno un'elevata sezione d'urto per cattura nucleare nella materia per cui non è conveniente utilizzarli per questo tipo di misure.

⁸Un atomo che possieda, in una *shell* elettronica, una o più particelle diverse dall'elettrone (π^- o μ^-), viene detto atomo mesico. Nel caso del muone questi atomi possono subire una cattura K (es. $p\mu^- \rightarrow n\nu_\mu$) oppure il μ può decadere in orbita.

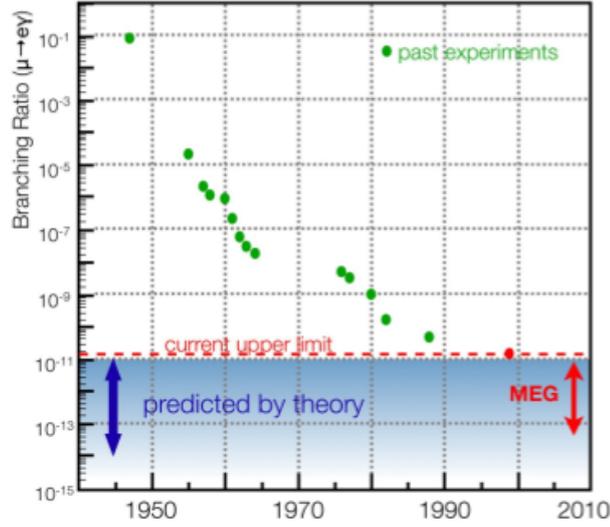


Figura 1.6: Evoluzione nel tempo del limite al 90% di C.L. sul $BR_{\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma}$.

Esperimento	Anno	R_μ (Hz)	ΔE_e (%)	ΔE_γ (%)	$\Delta t_{e\gamma}$ (ns)	$\Delta \Theta_{e\gamma}$ (mrad)	Limite (90%C.L.)
TRIUMF [26]	1977	$2 \cdot 10^5$	10	8.7	6.7	-	$< 3.6 \cdot 10^{-9}$
SIN [27]	1980	$5 \cdot 10^5$	8.7	9.3	1.4	-	$< 1.0 \cdot 10^{-9}$
LANL [28]	1982	$2.4 \cdot 10^6$	8.8	8.0	1.9	37	$< 1.7 \cdot 10^{-10}$
Crystal Box [29]	1988	$3 \cdot 10^5$	8.0	8.0	1.8	87	$< 4.9 \cdot 10^{-11}$
MEGA [20, 21]	1999	$1.5 \cdot 10^7$	1.2	4.5	1.6	15	$< 1.2 \cdot 10^{-11}$
MEG [30]	2012	$3 \cdot 10^7$	$0.7 \div 0.9$	4	0.15	18	$< 1.0 \cdot 10^{-13}$

Tabella 1.5: Evoluzione nel tempo delle risoluzioni (FWHM) e del limite sul $BR_{\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma}$. Per TRIUMF e SIN hanno utilizzato un fascio continuo di μ (*Duty Cycle* $\delta_D = 100\%$) come MEG, mentre LANL, Crystal Box e MEGA avevano un fascio pulsato: $\delta_D = 6.7\%$, $6 \div 9\%$ e $6 \div 7\%$ rispettivamente.

R_μ indica l'intensità dei fasci di muoni impiegati (in Hz) e le risoluzioni delle variabili cinematiche ($\Delta E_e, \Delta E_\gamma, \Delta t_{e\gamma}, \Delta \Theta_{e\gamma}$) sono espresse in FWHM (Full Width Half Maximum)⁹.

1.4 I fondi per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$

Il decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ ($m_\mu \simeq 105.66$ MeV [2]) con μ a riposo può essere simulato da due diversi tipi di fondi (figura 1.7):

- il **fondo fisico** (o **correlato**), dovuto ad un decadimento radiativo (RMD) del muone in cui l'angolo relativo tra e^+ e γ ($\Theta_{e\gamma}$) e le loro energie E_γ e E_e risultano indistinguibili da quelli del segnale entro le risoluzioni sperimentali;

⁹D'ora in poi salvo avviso contrario si indicherà con Δx la risoluzione sperimentale (espressa in FWHM) della variabile x

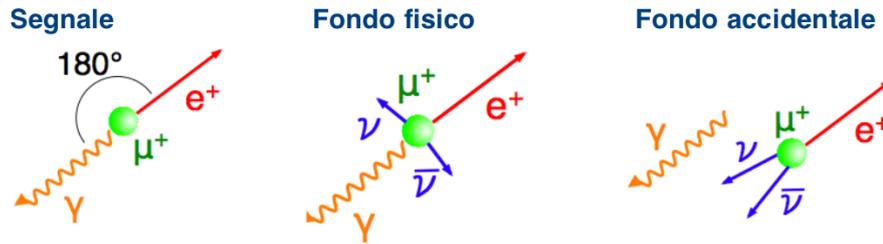


Figura 1.7: Il segnale $\mu \rightarrow e\gamma$ e i relativi fondi, fisici e accidentali.

- il **fondo accidentale** dovuto a coincidenze casuali tra un e^+ ed un γ di diverse provenienze, ma tali che le variabili misurate ($\Theta_{e\gamma}, E_\gamma, E_e, \Delta t_{e\gamma}$) sono indistinguibili da quelle del segnale entro le risoluzioni sperimentali.

1.4.1 Fondo fisico

La larghezza differenziale del decadimento radiativo ($\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu \gamma$) $d\Gamma(x, y, z)$ viene convenzionalmente espressa in funzione delle variabili $x = 2 \frac{E_e}{m_\mu}$, $y = 2 \frac{E_\gamma}{m_\mu}$, $z = \pi - \Theta_{e\gamma}$. Lo spettro in energia dei fotoni provenienti dal decadimento radiativo è mostrato in figura 1.8 [25].

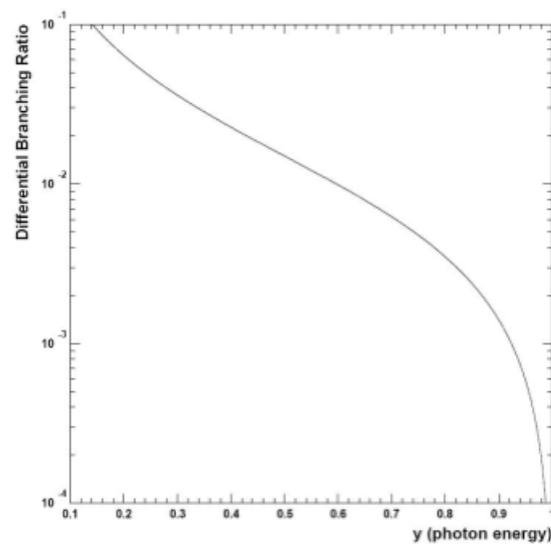


Figura 1.8: Spettro in energia dei fotoni provenienti dal decadimento radiativo $\mu \rightarrow e\nu_e\nu_\mu\gamma$ espresso in funzione della variabile $y = \frac{2E_\gamma}{m_\mu}$ [25].

Quando $x = 1, y = 1$ la larghezza differenziale di decadimento è nulla. In un esperimento reale, però, a causa della risoluzione finita del rivelatore è necessario definire delle finestre di ricerca del segnale in cui possono cadere eventi di fondo che limitano la sensibilità dell'esperimento stesso.

Per energie del positrone e del fotone molto vicine a metà della massa del muone, le variabili precedentemente definite possono essere sviluppate attorno ai valori $x \approx 1, y \approx 1$ e $z \approx 0$. La probabilità che un evento di fondo simuli un evento di segnale può essere quindi calcola-



ta integrando il rapporto di decadimento all'interno della finestra di segnale determinata dalle risoluzioni sperimentali.

Note le risoluzioni sperimentali FWHM $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ed utilizzando per semplicità finestre gaussiane con probabilità del 90% di rivelare il segnale, le regioni di ricerca sono espresse da:

$$\begin{aligned} 1 - \delta x &\leq x \leq 1 \\ 1 - \delta y &\leq y \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq 2\sqrt{(1-x)(1-y)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove $\delta x = 0.7 \cdot \Delta x$, $\delta y = 0.7 \cdot \Delta y$ e $\delta z = 0.7 \cdot \Delta z$ sono le semi-larghezze delle finestre stesse¹⁰. Se δz (in radianti) è piccolo rispetto ai vincoli cinematici imposti dallo spazio delle fasi ($\delta z \leq 2\sqrt{\delta x \delta y}$), l'intervallo di integrazione sulla variabile z si riduce a $0 \leq z \leq \delta z$ [25]. Questa relazione è soddisfatta nel caso dell'esperimento MEG come si può dedurre dalla tabella 1.5 ($0.013 \simeq \delta z \leq 2\sqrt{\delta x \delta y} \simeq 0.023$).

Per ottenere un fondo fisico $\lesssim 10^{-14}$, la risoluzione FWHM in energia dell'apparato sperimentale deve essere non superiore al $\approx 5\%$ sul fotone ed al $\approx 1\%$ sul positrone [25]. I valori riportati in tabella 1.5 per MEG soddisfano queste condizioni e il BR del fondo fisico risulta $\approx 4 \cdot 10^{-15}$.

1.4.2 Fondo accidentale

Mentre l'unica sorgente di positroni di alta energia è costituita dai decadimenti di Michel del μ stesso, i fotoni di alta energia possono provenire principalmente da:

- decadimento radiativo del muone;
- annichilazione di positroni in volo su elettroni dei materiali del rivelatore.

L'intensità dei contributi elencati è proporzionale alla frequenza dei muoni che si arrestano sul bersaglio. In figura 1.9 è mostrato il numero di fotoni (normalizzati al singolo decadimento) rivelati all'interno della finestra di analisi (cioè con energia compresa tra l'energia di soglia per l'analisi E_{th} e $m_\mu/2$) per i diversi processi e per la somma di questi, ottenuto tramite una simulazione completa dell'apparato sperimentale. I maggiori contributi all'annichilazione in volo provengono dal bersaglio ($\approx 30 \div 40\%$) e dal materiale delle camere a deriva (gas di riempimento e supporti, $\approx 60 \div 70\%$).

Il numero di eventi accidentali all'interno della finestra di selezione degli eventi è espresso dalla formula [31]:

$$N_{acc} = R_\mu \times \left(f_e^0 \frac{\Omega}{4\pi} \epsilon_e \right) \times R_\mu \times \left(f_\gamma^0 \frac{\Omega}{4\pi} \epsilon_\gamma \right) \times \left(\frac{\delta\omega_{e\gamma}}{\Omega} \right) \times (2\delta t_{e\gamma}) \times T = R_{acc} \times T \quad (1.16)$$

dove R_μ rappresenta l'intensità istantanea del fascio di muoni ed R_{acc} quella degli eventi accidentali, f_e^0 e f_γ^0 le frazioni dello spettro di positrone e fotone con energia all'interno della finestra di segnale, $\delta t_{e\gamma}$ e $\delta\omega_{e\gamma}$ le semi-larghezze della finestra d'accettazione in tempo e in angolo relativo positrone-fotone, T il tempo di misura ed ϵ_e , ϵ_γ le efficienze per il positrone e per il fotone. Considerando le risoluzioni della tabella 1.5 ed i risultati della simulazione del fondo γ accidentale

¹⁰Il fattore 0.7 corrisponde ad una probabilità del 90% di rivelare un segnale se Δx è la FWHM di una distribuzione gaussiana.

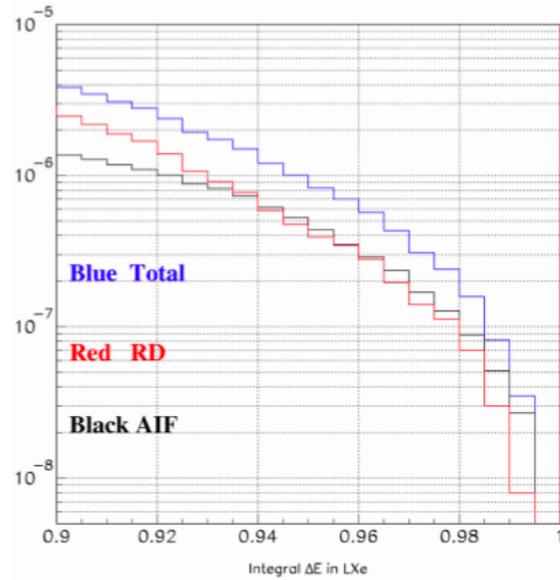


Figura 1.9: Spettri integrali dei fotoni dal valore di soglia all'*end-point*, espressi in funzione della variabile $y = \frac{2E_\gamma}{m_\mu}$: la distribuzione rossa indica i fotoni da decadimento radiativo del muone, la distribuzione nera i fotoni prodotti dall'annichilazione di un positrone in volo, la distribuzione blu indica la somma delle due. La figura mostra che fino ad energie di $\sim 50 \div 51$ MeV risulta dominante il decadimento radiativo, mentre per energie superiori domina l'annichilazione dei positroni.

mostrato in figura 1.9, il numero atteso di eventi accidentali risulta ≈ 1.2 in $4 \cdot 10^7$ s di tempo vivo. Il rapporto di decadimento equivalente per gli eventi di fondo accidentale risulta $6.1 \cdot 10^{-14}$.

Il BR effettivo del fondo accidentale dipende dall'intensità del fascio e dalle dimensioni della finestra del segnale nella seguente maniera:

$$\text{BR}_{acc} \propto R_\mu \cdot (\Delta\Theta_{e\gamma})^2 \cdot \Delta t_{e\gamma} \cdot (\Delta E_\gamma)^2 \cdot \Delta E_e \quad (1.17)$$

Si noti che la dipendenza è lineare nell'intensità del fascio R_μ , nelle risoluzioni in energia del positrone (ΔE_e) e in tempo relativo ($\Delta t_{e\gamma}$), mentre è quadratica nelle risoluzioni in energia del fotone (ΔE_γ) ed in angolo relativo ($\Delta\Theta_{e\gamma}$)¹¹. Concludiamo quindi che:

- l'intensità del fascio di μ deve essere scelta tenendo conto delle risoluzioni per ottimizzare il rapporto segnale/fondo;
- la dipendenza quadratica della risoluzione energetica del γ spinge ad utilizzare calorimetri di elevate prestazioni.

***Pile-Up* dei fotoni**

Come sarà illustrato nel capitolo 2.3, il calorimetro elettromagnetico ha una struttura omogenea. A causa di questa proprietà è possibile che due o più fotoni di bassa energia entranti nel volume sensibile siano ricostruiti come un singolo fotone di alta energia. Questa sovrapposizione casuale

¹¹Dall'integrazione su ΔE_γ dello spettro d'energia del fotone, risulta che $f_\gamma^0 \propto (\Delta E_\gamma)^2$, mentre per i positroni $f_e^0 \propto \Delta E_e$.



è nota come *Pile-Up*. La digitizzazione delle forme d'onda e la ricostruzione topologica degli eventi aiutano a ridurre questa sorgente di fondo.

La figura 1.10 mostra una simulazione della distribuzione in energia del fondo dei γ globale e separata nelle sue componenti. Per energie intorno a quelle di segnale ($E_\gamma \simeq 53$ MeV) si stima una contributo di *Pile-Up* dell'ordine del 10%.

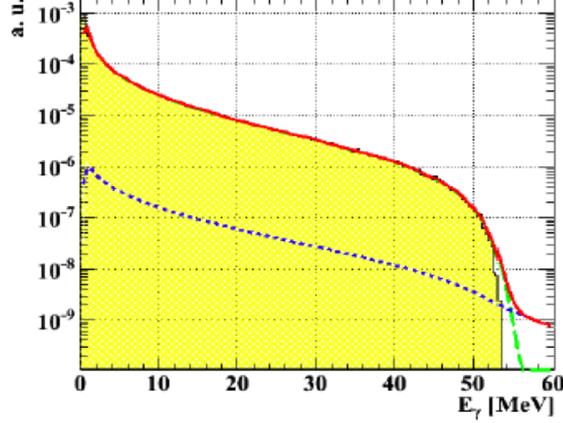


Figura 1.10: Simulazione dello spettro in energia del fondo di fotoni separato nelle sue componenti. In rosso il totale, in blu il *Pile-Up*, il giallo il decadimento radiativo e l'annichilazione in volo ed in verde l'effetto della risoluzione sperimentale.

1.5 Sensibilità dell'esperimento MEG

Nel caso di esperimenti in cui il decadimento atteso non venga osservato viene stabilito un limite superiore sul BR con un certo livello di confidenza (CL), tipicamente il 90%. La *sensibilità sul singolo evento* (*SES*) è definita come il BR in corrispondenza del quale il numero di decadimenti attesi durante un esperimento è uguale ad uno e si ottiene considerando l'intensità del fascio dei muoni R_μ , l'accettanza angolare $\Omega/4\pi$, il tempo vivo di misura T e le efficienze dell'esperimento [30]:

$$SES_{MEG} = \frac{1}{R_\mu \cdot T \cdot \Omega/4\pi} \times \frac{1}{\epsilon_e \cdot \epsilon_\gamma \cdot \epsilon_{sel}} \quad (1.18)$$

dove ϵ_{sel} è l'efficienza nella selezione degli eventi ed ϵ_e e ϵ_γ sono le efficienze di rivelazione del positrone e del fotone rispettivamente.

Nel caso di MEG, utilizzando una frequenza di arresto per i muoni $R_\mu \approx 3 \cdot 10^7$ /s, una durata dell'esperimento $T = 4 \cdot 10^7$ s (circa 1.2 anni di tempo vivo), un'accettanza angolare $\Omega/4\pi = 9\%$, $\epsilon_{sel} = 0.7$, $\epsilon_e = 0.65$ ed $\epsilon_\gamma = 0.4$, la *SES* dell'esperimento MEG risulta pari a $\approx 5 \cdot 10^{-14}$.

Per stimare la sensibilità dell'esperimento si utilizza l'approccio statistico di Feldman & Cousins [32]. La stima qui riportata è basata sul numero di eventi osservati in una ristretta regione di analisi (*Box Analysis*), ma nel capitolo 6 si presenterà una analisi di *Likelihood* che tiene conto dei valori misurati di E_γ , E_e , $\Delta t_{e\gamma}$, $\Delta \Theta_{e\gamma}$ per ciascun evento.

La distribuzione del numero di eventi di segnale osservati in un esperimento come MEG è poissoniana ed il suo valore medio μ è la quantità che si vuole misurare. Per valutare l'intervallo di μ esplorabile dall'esperimento si utilizzano i parametri definiti nel calcolo della *SES*, ipotizzando



ad esempio, che non sia stato osservato alcun evento riconducibile ad un decadimento $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$. Il valor medio μ è spresso dalla relazione (vedere la (1.18)):

$$\mu = \text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma} \cdot R_\mu \cdot T \cdot \epsilon_e \cdot \epsilon_\gamma \cdot \epsilon_{sel} \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \quad (1.19)$$

In base alle stime della proposta MEG (tabella 1.5 a pagina 18) è lecito attendersi circa 0.5 eventi di fondo in due anni di presa dati. Utilizzando l'approccio frequentista di Feldman & Cousins, nel caso di non osservazione del segnale in 2 anni di presa dati, è possibile stabilire un limite superiore al 90% di CL:

$$\text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma} < 1.8 \cdot 10^{-13} \quad (1.20)$$

Con lo stesso schema di ragionamento, supponendo di osservare tre eventi in 2 anni di misura si può determinare la banda (*belt*) al 90% di CL:

$$3 \cdot 10^{-14} < \text{BR}_{\mu^+ \rightarrow e^+\gamma} < 3.5 \cdot 10^{-13} \quad (1.21)$$

In figura 1.11 sono riportati gli intervalli al 90% di CL per la variabile μ in funzione del numero di eventi k rivelati durante l'esperimento, in presenza di 0.5 eventi di fondo.

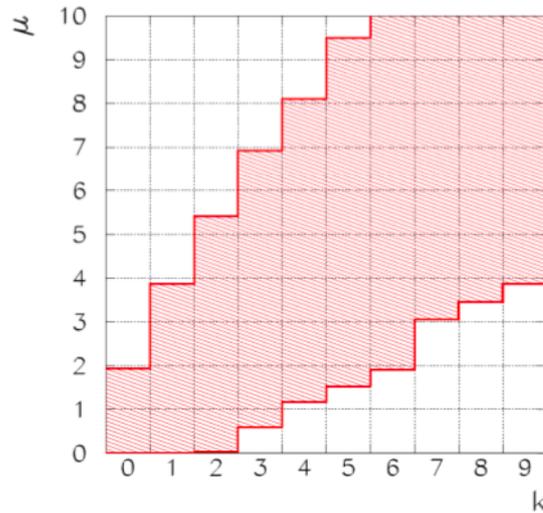


Figura 1.11: Intervalli al 90% di CL per la variabile μ in funzione del numero di eventi k rivelati durante l'esperimento, in presenza di 0.5 eventi di fondo.



Capitolo 2

Apparato Sperimentale

La segnatura del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ consiste nella produzione simultanea di un fotone e di un positrone aventi la stessa energia (pari a metà della massa del μ , ovvero ≈ 52.83 MeV) ed emessi con un angolo relativo di 180° . L'apparato sperimentale necessita quindi di un calorimetro elettromagnetico per la misura dell'energia, del tempo di emissione e della direzione del fotone e di un sistema di tracciatura per la misura del vettore impulso del positrone, accoppiato con un rivelatore a risposta rapida per la misura del tempo di emissione del positrone stesso. Per la rivelazione del fotone è stato scelto un calorimetro a Xenon liquido (LXe) mentre per la tracciatura del positrone viene utilizzato uno spettrometro magnetico, chiamato COBRA, composto da un gruppo di camere a deriva immerse in un campo magnetico non uniforme. Il tempo di volo del positrone viene infine misurato da un rivelatore a scintillazione chiamato *Timing Counter*. Una rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale è illustrata in figura 2.1

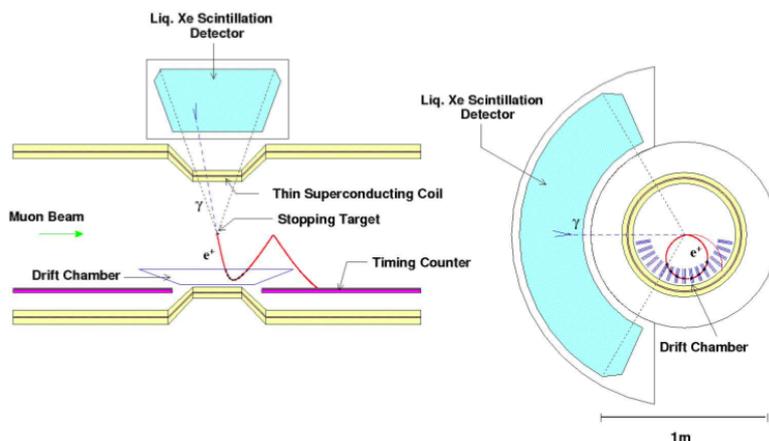


Figura 2.1: Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale.

Il rivelatore copre circa il 10% di tutto l'angolo solido attorno al bersaglio, sia per ragioni di ottimizzazione dei sottorivelatori che per ragioni economiche. Il sistema di riferimento cartesiano dell'esperimento è una terna levogira con l'origine nel centro del bersaglio in cui vengono arrestati i muoni. L'asse z è orientato nella direzione del fascio, l'asse y è diretto verso l'alto e l'asse x punta nel verso opposto al calorimetro (il calorimetro è situato nel semispazio con $x < 0$). Una



vista tridimensionale dell'apparato con l'indicazione del sistema di riferimento appena descritto è mostrata in figura 2.2.

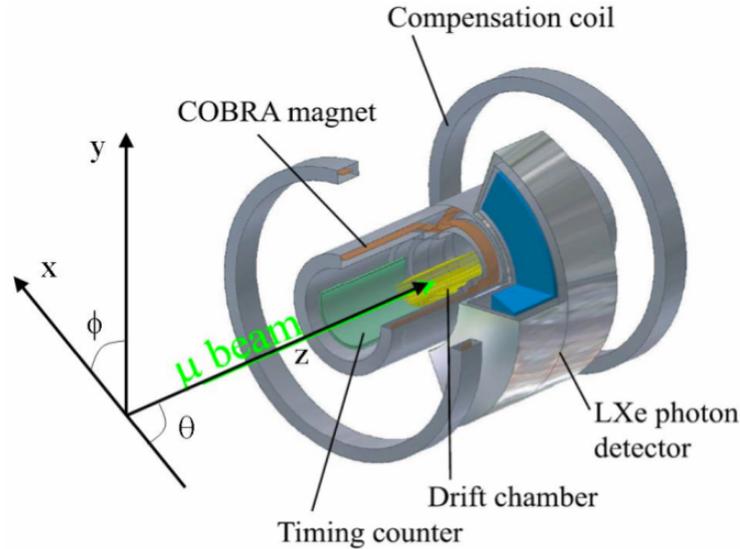


Figura 2.2: Vista tridimensionale dell'apparato con l'indicazione del sistema di riferimento.

In questo capitolo descriveremo la linea di fascio ed il trasporto dei μ al bersaglio (paragrafo 2.1), lo spettrometro magnetico che rivela i positroni (paragrafo 2.2), il calorimetro a Xenon liquido (paragrafo 2.3), il sistema di trigger (2.4) ed il sistema di acquisizione (2.5). L'analisi delle prestazioni del calorimetro elettromagnetico sarà l'oggetto della seconda parte di questa tesi.

2.1 Linea di fascio e bersaglio

2.1.1 La linea di fascio $\pi E5$ del PSI

L'esperimento MEG utilizza come sorgente di muoni i prodotti secondari dell'acceleratore del Paul Scherrer Institut (PSI). Tale acceleratore produce un fascio primario di protoni da 590 MeV/c d'impulso, con intensità massima di $\sim 10^{16}$ protoni/sec, corrispondenti ad una corrente di ~ 2.2 mA. L'interazione del fascio con un bersaglio di grafite (*E-target*, spesso 4 cm) produce essenzialmente π , dato che l'energia disponibile è al di sotto della soglia di creazione dei mesoni K . I π^- vengono rimossi dal fascio ed i π^+ rimanenti decadono quasi esclusivamente in μ^+ tramite la reazione $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Il decadimento dei pioni può avvenire in volo, all'interno del bersaglio¹ o sulla sua superficie.

L'esperimento MEG utilizza la linea di fascio $\pi E5$ che raccoglie i μ^+ prodotti dai decadimenti di π^+ in quiete sulla superficie del *E-target* (*surface muons*) aventi impulso pari a 29 MeV/c e totalmente polarizzati², ad un angolo di 175° rispetto alla direzione incidente del fascio primario

¹I π prodotti in questo modo hanno poco impulso (~ 4 MeV/c) e vengono per lo più arrestati.

²Il decadimento $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ è a due corpi e il neutrino ha elicità definita.

di protoni³. La linea $\pi E5$ ha la più alta accettazione di *surface muons* fra quelle del PSI. Uno schema dell'area sperimentale e della linea di fascio è mostrato in figura 2.3.

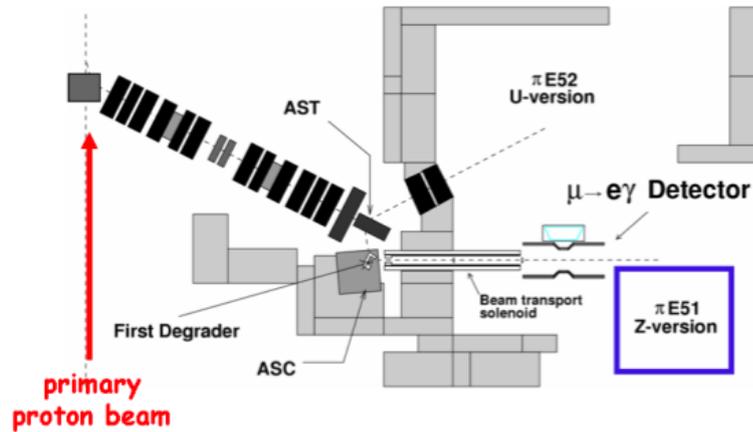


Figura 2.3: Schematizzazione della linea di fascio dell'esperimento e dell'area $\pi E5$.

Le misure dei flussi di μ e π nella linea $\pi E5$ in funzione dell'impulso delle particelle sono presentati in figura 2.4. Per un valore dell'impulso di 29 MeV/c è ottimizzata la purezza del flusso dei μ^+ rispetto ai π^+ . Infatti, essendo i *surface muons* quasi monocromatici, possono essere efficientemente focalizzati tramite lenti magnetiche.

Le caratteristiche della linea di fascio sono riportate nella tabella 2.1 [33].

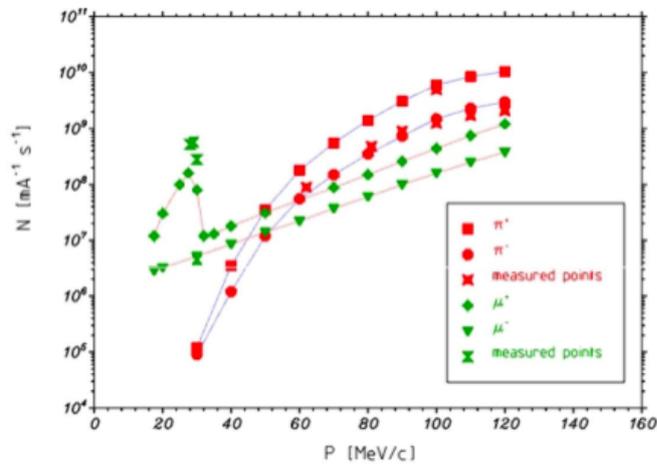


Figura 2.4: Flusso di μ e π nella linea di fascio $\pi E5$ in funzione dell'impulso. Si noti che in corrispondenza dell'impulso dei *surface muons* (29 MeV/c) la contaminazione dei pioni è minima.

³La linea ad angolo di 175° ha il vantaggio di essere più pulita, in quanto la maggior parte delle particelle di fondo è emessa in avanti, con angolo prossimo a 0°



Lunghezza della linea di fascio	10.4 m
Intervallo in impulso	20 ÷ 120 MeV/c
Risoluzione in impulso	2%
Angolo solido	150 msr
Sezione del fascio (FWHM)	4 × 4 cm ²
Divergenza angolare orizzontale (FWHM)	15.3 cm · rad
Divergenza angolare verticale (FWHM)	3.6 cm · rad

Tabella 2.1: Proprietà della linea di fascio $\pi E5$.

2.1.2 Bersaglio per gli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$

Prima di incidere sul bersaglio dell'esperimento, il fascio deve essere ripulito dal gran numero di positroni di fondo presenti (superiori di un fattore 10 rispetto ai muoni)⁴. Inoltre è necessario ridurre l'impulso dei muoni in modo che possano essere arrestati sul sottile bersaglio dell'esperimento.

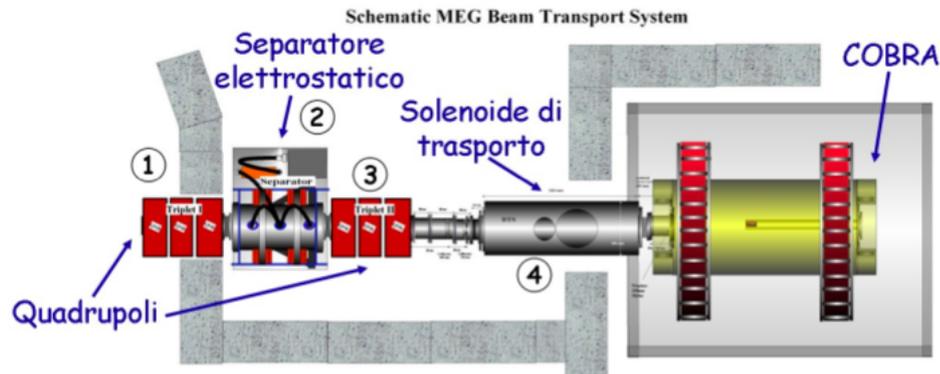


Figura 2.5: Schematizzazione della linea di trasporto dei muoni nell'area $\pi E5$.

La rimozione dei positroni dal fascio e la loro degradazione sono operate da una serie di elementi elettromagnetici inseriti tra la linea di fascio ed il magnete COBRA, come mostrato in figura 2.5. In dettaglio tali elementi sono:

1. un tripletto di quadrupoli per focalizzare il fascio in entrata;
2. un separatore elettrostatico che opera come selettore di velocità e crea, ad una distanza di circa 2 m dal bersaglio, una separazione spaziale tra muoni ed elettroni pari a 11 cm, equivalente a 7σ (σ è l'incertezza combinata delle due distribuzioni in posizione, come mostrato in figura 2.6);
3. un secondo tripletto di quadrupoli inserito dietro al separatore per la rifocalizzazione del fascio dopo l'azione del separatore;
4. un solenoide di trasporto (**B**eam **T**ransport **S**olenoid, BTS) utilizzato come giunzione magnetica tra l'ultimo quadrupolo ed il magnete COBRA (vedi paragrafo 2.2.1). Al suo interno contiene un degradatore per ridurre l'impulso dei μ .

⁴L'alto numero di positroni è dovuto, in prevalenza a produzione di coppie e^+e^- da parte dei fotoni.

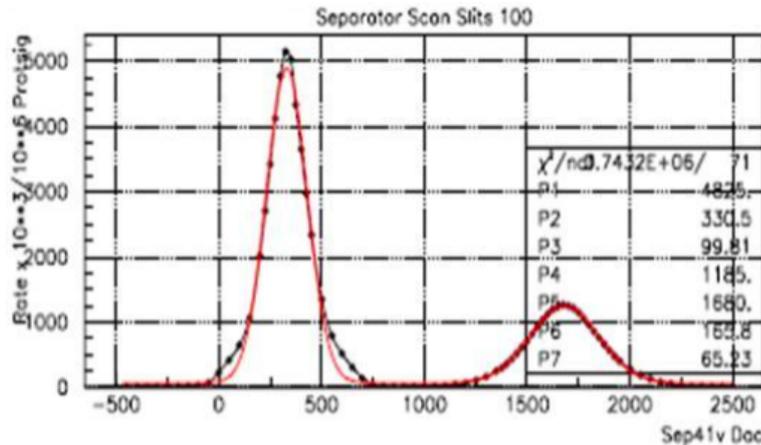


Figura 2.6: Separazione spaziale tra muoni (a destra) e positroni (a sinistra), ottenuta tramite un fit a doppia gaussiana (linea rossa), in unità arbitrarie misurata nell'area sperimentale $\pi E5$ a due metri dal separatore elettrostatico.

Il materiale scelto per arrestare i muoni è il polietilene. Per fermare completamente i *surface muons* sono necessari 1.1 mm di questo materiale: 200 μm sono posti nel degradatore all'interno del BTS e i restanti 900 μm costituiscono il bersaglio. In realtà il bersaglio ha uno spessore di 205 μm , ma è ruotato di 20.5° rispetto alla direzione del fascio, in modo da ottenere tramite l'inclinazione una lunghezza effettiva di $\approx 900 \mu\text{m}$. Il bersaglio è immerso in un'atmosfera di He per minimizzare le interazioni dei positroni emessi nel decadimento⁵, riducendo così la possibilità di scattering multiplo.

In queste condizioni il fascio ha un'intensità massima prevista di $2.0 \cdot 10^8 \mu/\text{sec}$ e può essere focalizzato su un'ellisse di dimensioni $\sigma_x = 5.5 \text{ mm}$, $\sigma_y = 6.5 \text{ mm}$; tuttavia, a causa dello scattering multiplo causato dal degradatore, dalla finestra a vuoto della linea di fascio e dall'atmosfera di elio, le dimensioni trasverse effettive del fascio risultano $\approx 12.5 \text{ mm}$ su entrambi gli assi.

2.2 Lo spettrometro per la misura dei positroni

Lo spettrometro per rivelare i positroni è composto da

- il magnete a superconduttore COBRA (paragrafo 2.2.1);
- le camere a deriva (DC) per misurarne la traccia e conseguentemente il vettore impulso (paragrafo 2.2.2);
- il *Timing Counter* (TC), che è una matrice bidimensionale di scintillatori, per misurarne il tempo di volo (paragrafo 2.2.3).

In figura 2.7 è mostrata una schematizzazione dello spettrometro.

2.2.1 Il magnete COBRA

COBRA (**CO**stant **B**ending **RA**dium) è costituito da cinque bobine superconduttrici di tre raggi differenti, posizionate simmetricamente rispetto al bersaglio. Due bobine resistive (Solenoidi di

⁵Il vuoto comporterebbe problemi di tipo meccanico.

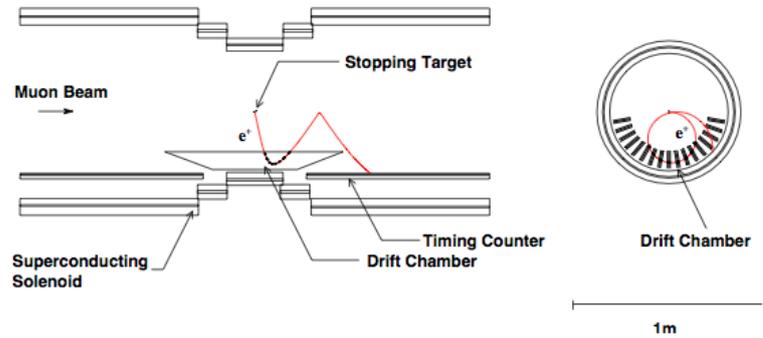


Figura 2.7: Rappresentazione schematica dello spettrometro di MEG. A destra il piano (x, r) e a sinistra quello (r, z) .

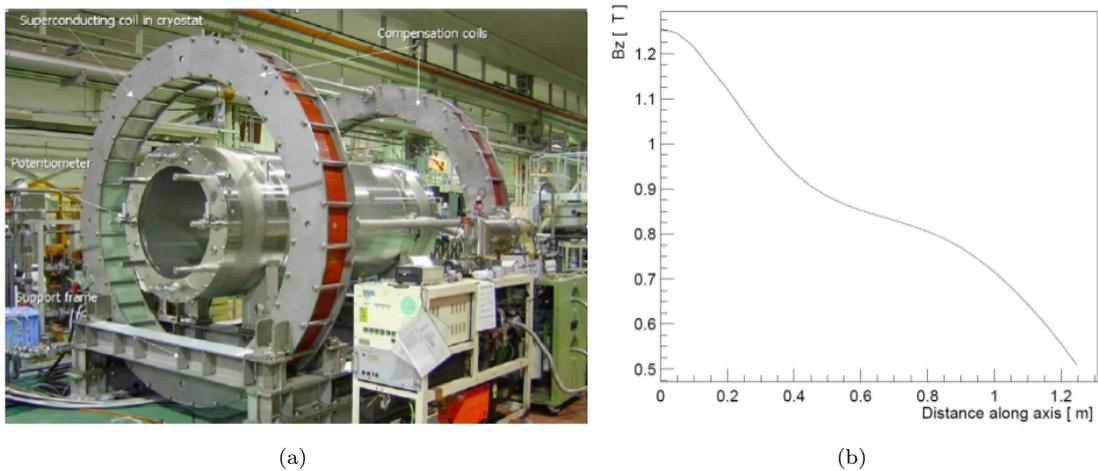


Figura 2.8: In (a) una fotografia di COBRA e in (b) il profilo dell'intensità del campo di COBRA lungo la linea del fascio (asse z).

Helmholtz) sono posizionate vicino alle estremità del magnete per compensare il campo al di fuori della zona del tracciatore, in particolare nella regione del calorimetro, in modo da non alterare il funzionamento dei fotomoltiplicatori. COBRA produce un campo magnetico non omogeneo a simmetria azimutale: in direzione longitudinale il campo ha un massimo pari a 1.28 T in $z = 0$ ed intensità decrescente per $|z|$ crescente. Le linee di campo sono in una configurazione detta antibottiglia magnetica⁶ che si raccorda con il campo magnetico presente nella BTS. In figura 2.8 è mostrata una foto di COBRA (2.8(a)) e l'andamento del suo campo longitudinale in funzione di $|z|$ (2.8(b)).

I vantaggi di questa configurazione di campo rispetto ad una uniforme sono:

- un positrone emesso con un angolo prossimo a 90° rispetto all'asse del campo magnetico viene rapidamente espulso dalla regione delle camere (figura 2.9(a)), mentre in un campo

⁶La bottiglia magnetica è una configurazione di campo in cui una particella carica che lo attraversa viene accelerata man mano che si avvicina al centro e rallentata nuovamente mentre si avvicina all'estremo (è possibile quindi imprigionarla). L'antibottiglia funziona in modo opposto ed è quindi possibile, come nel caso di MEG, accelerare i positroni per farli uscire rapidamente dallo spettrometro.



uniforme attraverserebbe più volte il tracciatore, aumentandone così l'occupazione ed il tempo morto (figura 2.9(b));

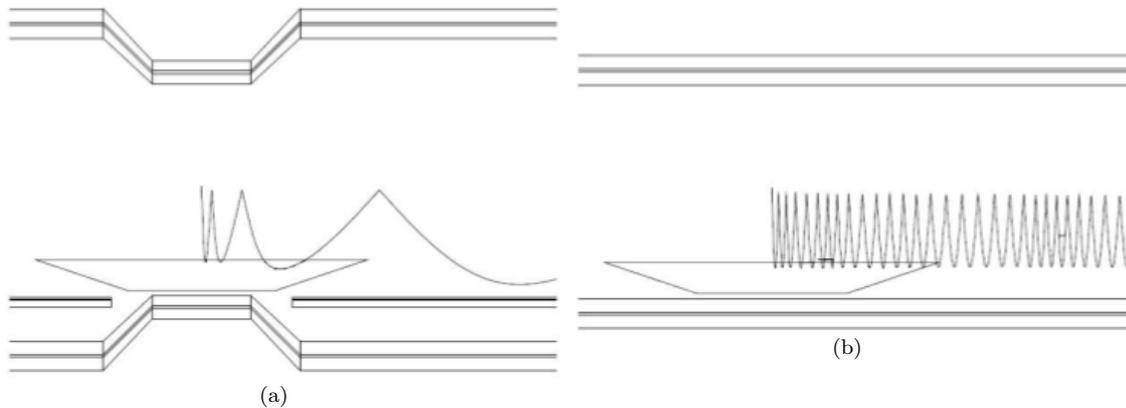


Figura 2.9: Traiettorie di un positrone emesso a 90° rispetto al fascio nel campo magnetico a gradiente di COBRA (a) e in un campo uniforme (b). Nel caso di COBRA il positrone viene espulso rapidamente dalle camere, mentre nel campo uniforme le attraversa molte volte.

- il gradiente del campo può essere scelto in modo che il raggio di curvatura della traiettoria del positrone dipenda quanto più possibile dal modulo dell'impulso (figura 2.10(a)) e non dalla sua componente trasversa, come nel caso di un campo uniforme (figura 2.10(b)).

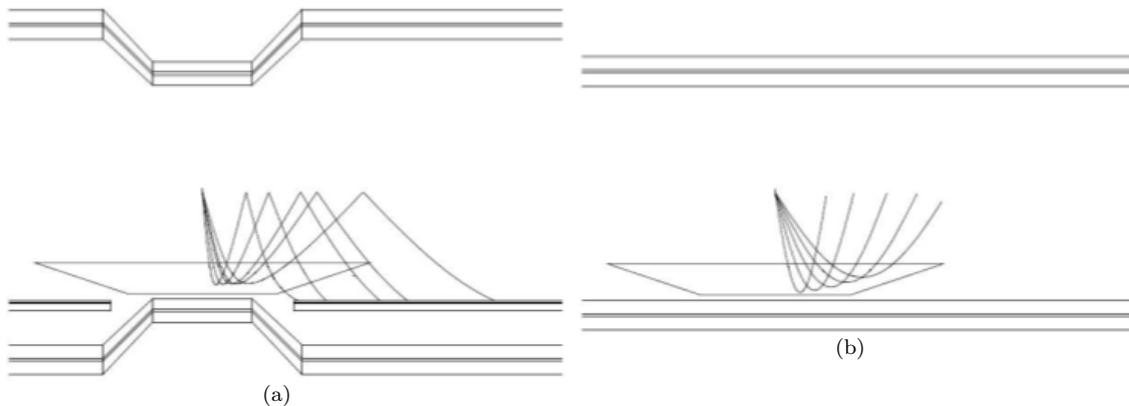


Figura 2.10: Curvatura della traiettoria di un positrone all'interno delle camere nel campo magnetico a gradiente di COBRA (a) ed in un campo uniforme (b). Nel caso di COBRA il raggio di curvatura del positrone non dipende dalla componente trasversa dell'impulso.

Come già accennato, il campo magnetico potrebbe alterare il funzionamento dei fototubi del calorimetro, per cui è necessaria la compensazione operata dalle bobine resistive. Nella figura 2.11(a) è mostrato l'effetto di un campo magnetico sul segnale in uscita dei fotomoltiplicatori: un campo con una componente di 150 Gauss parallela all'asse dei dinodi (y) o di 50 Gauss nel piano (x, z), perpendicolare ad esso, è sufficiente a dimezzare l'ampiezza del segnale. L'introduzione



delle bobine di compensazione risolve questo problema limitando il campo nella regione del calorimetro a valori inferiori a 50 Gauss (figura 2.11(b)).

Il campo magnetico di COBRA è stato mappato in oltre 25000 punti con una sonda di Hall unidimensionale. Il profilo misurato del campo è risultato in accordo entro $\sigma = 0.2\%$ rispetto al calcolo teorico nell'intero volume. È stata inoltre verificata la stabilità del campo durante una settimana di funzionamento continuato, misurando variazioni inferiori a 20 ppm.

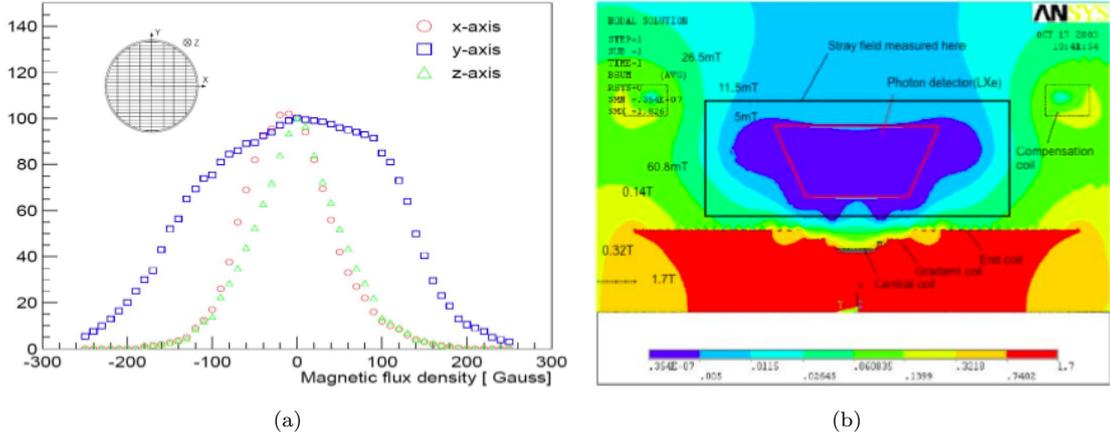


Figura 2.11: In (a) la risposta dei fotomoltiplicatori al variare dell'intensità e della direzione del campo magnetico a cui sono soggetti (l'asse dei dinodi è parallelo all'asse y) e in (b) il campo magnetico nella regione del calorimetro tenendo conto della compensazione operata dalle bobine di Helmholtz.

2.2.2 Le camere a drift

La misura dell'impulso del positrone viene effettuata attraverso 16 settori circolari di camere a deriva trapezoidali, posizionate radialmente ad intervalli angolari $\Delta\phi = 10.5^\circ$. Ogni camera è a sua volta formata da due camere a fili, sfalsate di metà della distanza tra due fili consecutivi in modo da risolvere l'ambiguità destra-sinistra (figura 2.12). L'area sensibile è posta nell'intervallo $19.3 \text{ cm} < r < 27 \text{ cm}$ con $|z| < 50 \text{ cm}$ per il raggio interno e $|z| < 21.9 \text{ cm}$ per il raggio esterno. La distanza tra le camere ed il bersaglio dei muoni riduce l'affollamento delle camere, impedendo ai positroni di Michel di basso impulso di raggiungere il sistema di tracciatura. La copertura angolare di questa geometria è $|\cos\theta| < 0.35$ e $|\phi| < 60^\circ$ per positroni da $52.8 \text{ MeV}/c$. Il volume delle camere è riempito con una miscela di gas 50:50 di He e C_2H_6 , scelta per ottenere un buon compromesso tra perdita di energia per ionizzazione ($\approx 65 \text{ e}^-/\text{cm}$ al minimo di ionizzazione) e diffusione coulombiana multipla degli elettroni ($X_0 \approx 650 \text{ m}$).

La configurazione di ogni camera permette di misurare contemporaneamente la coordinata r , utilizzando la differenza dei tempi di deriva verso i fili, ed il tempo assoluto, utilizzando la loro media, con una risoluzione sul tempo di deriva $\sigma \approx 5 \text{ ns}$. Considerando che la velocità di deriva nel gas è circa $4 \text{ cm}/\mu\text{s}$ per un campo elettrico di $\approx 1.5 \text{ KV}/\text{cm}$, si può stimare una risoluzione sulla coordinata radiale $\sigma_r \approx 150 \div 200 \mu\text{ m}$. Una stima preliminare della coordinata z si può estrarre dal rapporto delle cariche che raggiungono le estremità dei fili con una risoluzione $\sigma \approx 1 \text{ cm}$.

Sulla coordinata z è necessario raggiungere una precisione maggiore: per migliorare la risoluzione vengono utilizzati dei *Vernier pads* (figura 2.13), composti da sottili strati di alluminio depositati sui fogli catodici, che formano un pattern a dente di sega con periodo ben definito. La

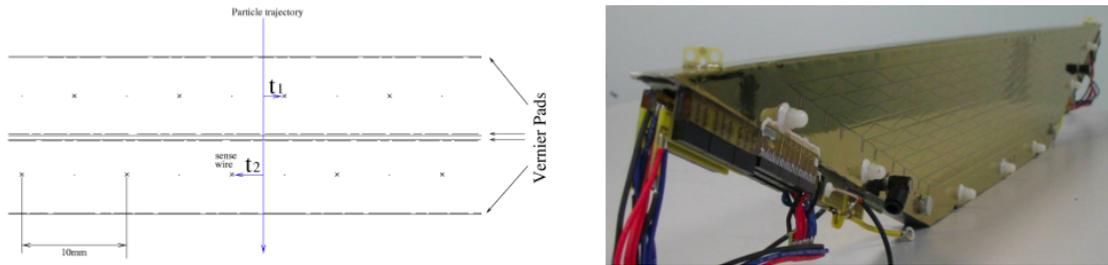


Figura 2.12: Schematizzazione di una DC (sinistra). A destra la foto di una di esse.

stima preliminare della coordinata z viene fatta misurando la carica raccolta dai fili che suggerisce in quale periodo del pattern il positrone ha rilasciato energia. In base alla raccolta di carica sulle pads si stima in quale punto della retta di salita o di discesa del pattern il positrone ha attraversato la DC. Utilizzando l'asimmetria catodica sui piani, sfasati fra loro di 45° , è possibile definire se il punto trovato appartenga alla retta di salita o a quella di discesa confrontando la carica raccolta su entrambi. In questo modo si riesce a misurare la z con una precisione di circa $300 \mu\text{m}$ [34].

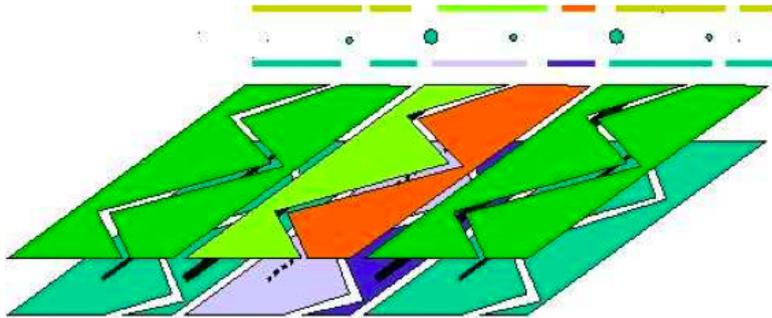


Figura 2.13: Pattern di Vernier sui fogli catodici di tre celle a drift. Nella parte alta della figura è mostrata la sezione trasversa ed è riportata la posizione relativa dei fili.

Le risoluzioni attese per l'apparato di tracciatura sono state studiate attraverso una simulazione basata su GEANT 3.21. I risultati della simulazione sono stati analizzati per determinare le prestazioni di diversi metodi per la ricostruzione di tracce di positroni da 52.8 MeV , ottenendo una risoluzione $\Delta p/p = 0.9\%$ in impulso e $\Delta\theta = 12 \text{ mrad}$ per l'angolo di emissione (entrambe FWHM). Il vertice del decadimento del μ sul bersaglio può essere ricostruito con una risoluzione di 2.5 mm FWHM sulle coordinate trasverse al fascio.

Per le risoluzioni sperimentali si rimanda alla tabella 6.2 a pagina 82 in cui saranno mostrati i risultati preliminari ottenuti sui dati del 2009.

2.2.3 Il rivelatore per il tempo dei positroni (Timing Counter)

La misura del tempo di volo è effettuata dal *Timing Counter* (TC), mostrato in figura 2.14(a). Il rivelatore è costituito da due sezioni identiche a forma di settore cilindrico, disposte simmetricamente lungo l'asse z rispetto alla posizione del bersaglio. La geometria nominale dell'apparato è tale da garantire una distanza costante di 29.5 cm dall'asse del fascio ed un intervallo di co-

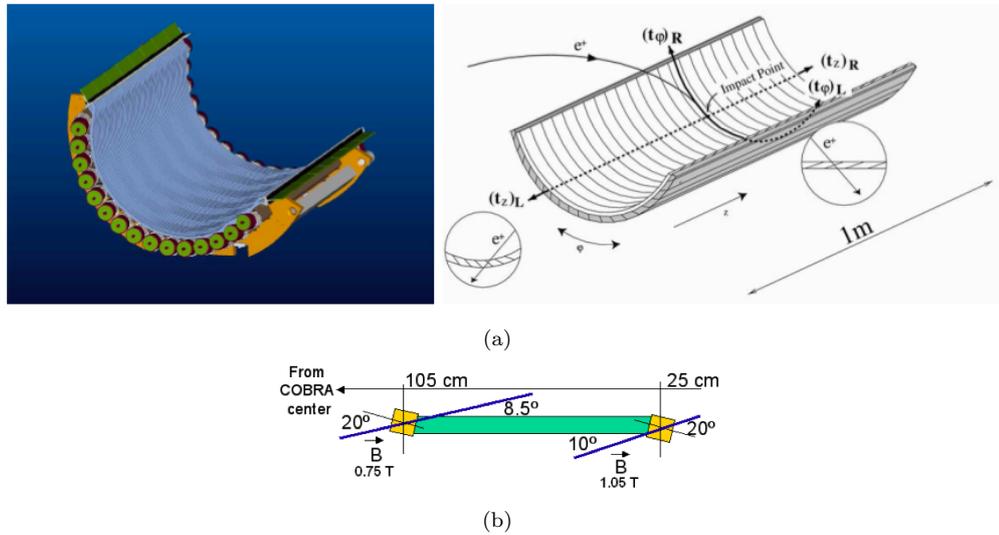


Figura 2.14: Schematizzazione (a) del TC. In dettaglio (b) lo schema di una barra del TC con relativi PMT di lettura

apertura di 145° in ϕ e $28.99 \text{ cm} \leq |z| \leq 108.61 \text{ cm}$. Ciascuna sezione presenta due strati: quello inferiore è composto da 15 barre di scintillatore plastico a sezione quadrata ($l = 4 \text{ cm}$), lunghe 79.62 cm , allineate lungo l'asse z , quello superiore da 256 fibre scintillanti di sezione quadrata ($l = 0.5 \text{ cm}$), disposte lungo ϕ . Ogni barra è letta agli estremi da due fotomoltiplicatori (PMT), ottimizzati per poter operare in condizioni di elevato campo magnetico. L'orientazione dei PMT rispetto alla direzione di \mathbf{B} è tale da minimizzare la dispersione del tempo di transito nella catena dinodica indotta dal campo (figura 2.14(b)). Le fibre sono lette da una matrice di fotodiodi a valanga (Avalanche Photodiodes, APD) scelti per la loro ridotta sensibilità al campo magnetico. Le dimensioni degli scintillatori sono state scelte in modo che il positrone rilasci un picco di $\sim 6 \text{ MeV}$ di energia (picco della distribuzione di Landau) ottenendo un rapporto segnale/rumore tale da raggiungere le risoluzioni richieste nella misura del tempo. Per proteggere i PMT dall'atmosfera di He presente all'interno dello spettrometro, il TC è ricoperto da un involucro di materiale plastico contenente azoto.

Grazie al gradiente del campo magnetico i positroni emessi con $|\cos \theta| < 0.35$ incidono sul TC dopo aver compiuto circa 1.5 giri nel piano (r, ϕ). Il punto di impatto viene ricostruito utilizzando sia il rapporto tra i segnali letti ai capi delle barre dai PMT, sia (con precisione più elevata) l'informazione raccolta dalle fibre. L'incertezza nella ricostruzione della coordinata spaziale è di circa 3 cm in z e 1 cm in $r\phi$ e l'informazione sulla posizione ricostruita dallo strato esterno del TC viene utilizzata come segnale rapido per il trigger. Il tempo di arrivo viene misurato pesando i singoli tempi di arrivo dei fotoelettroni sui PMT con la carica raccolta. In figura 2.15 è mostrata la risoluzione temporale in funzione del punto di impatto del positrone sulla barra (in configurazione di singola barra), misurata in test dedicati [35]. È bene sottolineare che tali misure evidenziano un comportamento ragionevolmente uniforme, con un valore medio di 95 ps ed un'incertezza $\sigma = 2 \text{ ps}$. La media delle misure risulta quindi in accordo con quanto richiesto nella proposta [30].

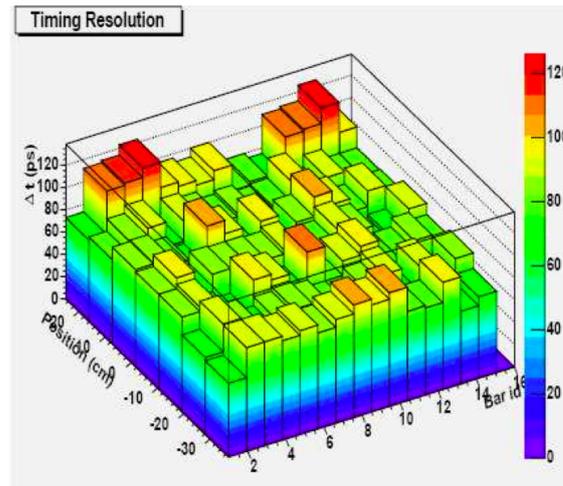


Figura 2.15: Risoluzione temporale del Timing Counter in funzione del punto di incidenza sulla barra, in configurazione di singola barra.

Calibrazioni del TC

Per ottenere e mantenere le prestazioni sopra citate (FWHM sul tempo di 95 ps, risoluzione di 3 cm lungo z e 1 cm lungo $r\phi$) sono necessarie continue misure di calibrazione, che possono essere divise in due gruppi principali:

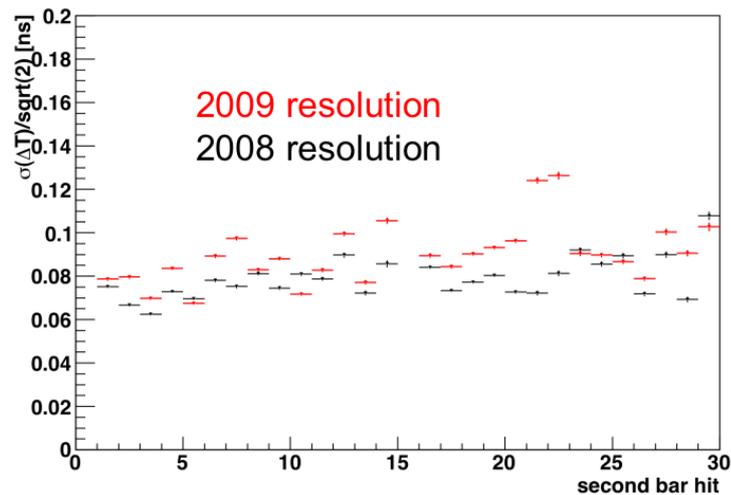


Figura 2.16: Risoluzione temporale del Timing Counter $\sigma_{\Delta T}/\sqrt{2}$ in funzione del numero di barra durante la presa dati del 2008 (in rosso) e del 2009 (in blu). Si nota che i dati del 2009 sono peggiori di quelli del 2008.

- operazioni sulla singola barra con calibrazione di:
 - guadagni relativi tra i due PMT;
 - ritardo temporale relativo tra i PMT di una barra;



- operazioni interbarra con calibrazione di:
 - scala in energia (assoluta e relativa);
 - ritardo temporale relativo tra ogni coppia di barre.

Per ottenere risultati affidabili sono necessari un buon grado di pulizia degli eventi dal fondo ed un'elevata statistica per tener conto dell'alto numero di barre. I candidati naturali per questo tipo di operazioni sono i positroni derivanti dal decadimento di Michel del muone, soprattutto in considerazione dell'elevata statistica disponibile. La presenza del campo magnetico con un gradiente determina però una disomogeneità nella distribuzione degli eventi in funzione del numero d'ordine della barra. In figura 2.16 è riportata la misura della risoluzione temporale di singola barra durante la presa dati del 2008 (in nero) e del 2009 (in rosso). La misura è effettuata utilizzando la differenza temporale Δt per eventi di positrone osservate da due barre adiacenti e correggendo per il tempo di volo fra le due barre. Poiché le due misure sono indipendenti, la risoluzione di singola barra è data da $\sigma_{\Delta T}/\sqrt{2}$.

In alternativa è possibile eseguire le calibrazioni anche mediante l'ausilio dei fotoni generati dalle reazioni di protoni su bersagli di Boro (utilizzato anche per la calibrazione del calorimetro come esposto nel paragrafo 2.3.3), o con i raggi cosmici. La consistenza dei diversi metodi è stata ripetutamente verificata.

2.3 Il calorimetro elettromagnetico a Xenon liquido

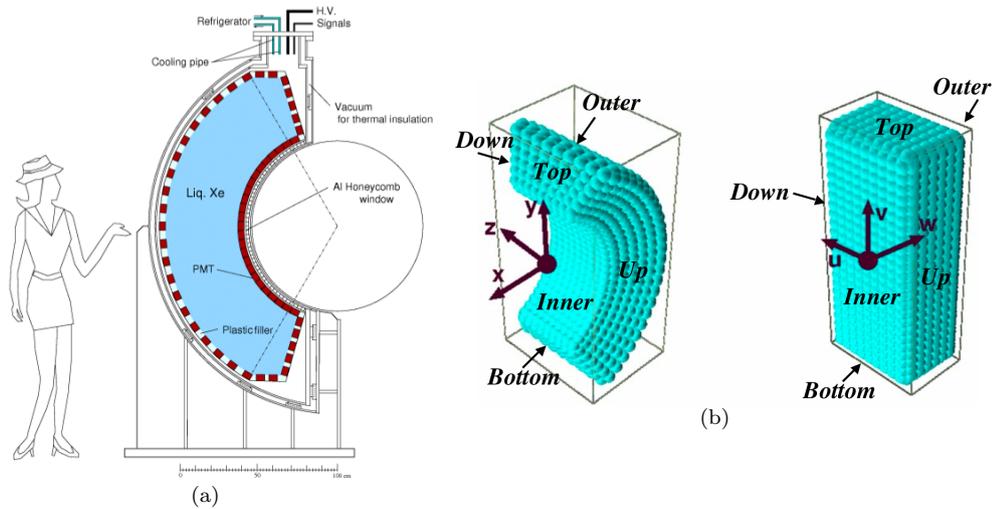


Figura 2.17: Rappresentazione grafica del calorimetro a Xenon liquido. In (a) lo schema tecnico e in (b) la definizione delle facce e la definizione del sistema di riferimento (u, v, w) rispetto a (x, y, z) .

Per la rivelazione del fotone l'esperimento MEG ha adottato una tecnica calorimetrica innovativa basata sulla scintillazione dello Xenon liquido (LXe) [36], elemento in grado di combinare un'efficiente resa in luce (confrontabile con quella dei cristalli inorganici) con un'elevata velocità di risposta. Ciò consente di misurare con la precisione richiesta il quadrimpulso del fotone ed il suo tempo di emissione. Non è invece prevista la raccolta della carica di ionizzazione, sia per

una più rapida rivelazione dei fotoni che per motivi di complessità costruttiva dell'elettronica. Uno schema del calorimetro è mostrato in figura 2.17.

Le facce del calorimetro sono chiamate rispettivamente *Inner* quella di fronte a COBRA, *Outer* quella più esterna, *Up* e *Down* quelle a monte e a valle rispetto alla direzione del fascio di μ (lungo z), e *Top* e *Bottom* quelle a forma trapezoidale nella parte alta e bassa del calorimetro. Con facce *lateral*i si intendono tutte le facce ad eccezione della *Inner*. Per il calorimetro viene utilizzato come sistema di riferimento, oltre alla terna (x, y, z) , la terna (u, v, w) definita in figura 2.17(b): $u = \frac{R_{in}}{r} \cdot z$, $v = R_{in} \cdot \arctan \frac{y}{-x}$ e $w = r - R_{in}$ (R_{in} raggio della faccia *Inner*, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

2.3.1 La struttura del calorimetro e le sue prestazioni

Il calorimetro ha una (2.17) forma a C con sezione trapezoidale. Questa geometria è stata scelta per rispettare la simmetria cilindrica dell'apparato e fare in modo che i fotoni prodotti nel bersaglio incidano quasi perpendicolarmente sulla sua superficie. Mentre le pareti del criostato sono realizzate in acciaio, le strutture di supporto dei fotomoltiplicatori sono costruite in alluminio per tutte le facce tranne quella d'ingresso dei fotoni (*Inner*). Quest'ultima è stata realizzata in materiale plastico (PEEK) per minimizzare la probabilità di interazione dei γ in ingresso. La faccia d'ingresso in acciaio del criostato ha uno spessore di 0.5 mm ed è sostenuta esternamente da una struttura semicilindrica in fibre di carbonio e *honeycomb*.

La copertura angolare è pari a circa il 10% dell'angolo solido ed è definita da $|\cos \theta| < 0.35$ e $120^\circ < \phi < 240^\circ$. Dall'angolo solido fiduciale viene esclusa la zona delimitata da $|\cos \theta| < 0.08$ poichè un positrone emesso in direzione opposta a quella del fotone non giungerebbe sul Timing Counter.

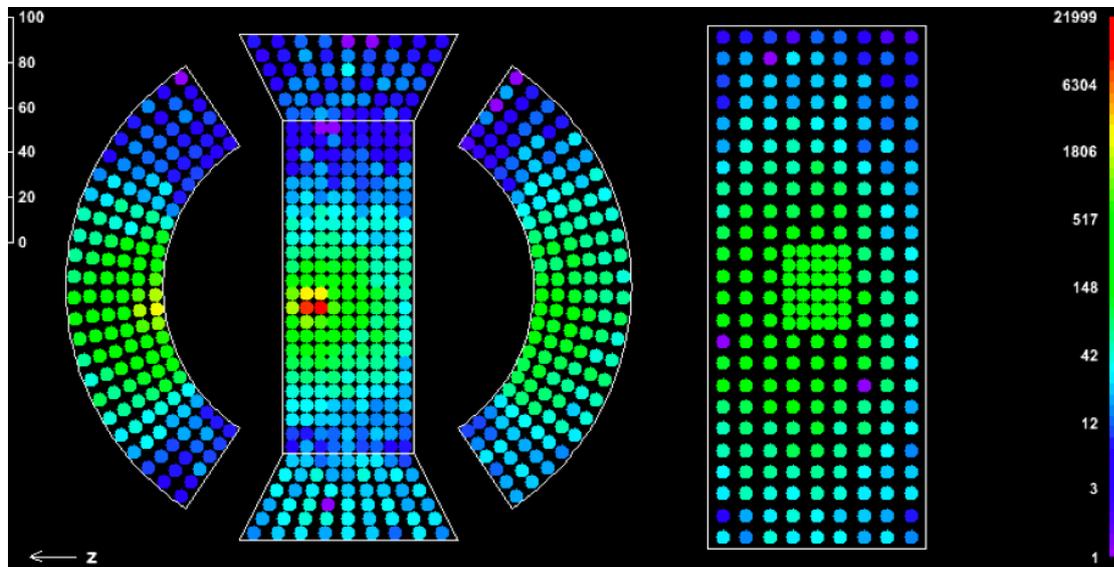


Figura 2.18: Mappa della collocazione dei fototubi: 216 (24 righe per 9 colonne) nella faccia *Inner*, 234 (24 righe per 9 colonne più 18 concentrati in un rettangolo centrale) nella faccia *Outer*, 144 (24 righe per 6 archi) per le facce *Up* e *Down* e 54 (6 righe per 9 colonne) per le facce *Top* e *Bottom*. La scala dei colori mostra l'altezza del segnale in carica raccolta dai vari PMT in un evento.



Il raggio interno misura 67.5 cm e quello esterno 112 cm. Il volume sensibile è pari a 0.8 m^3 di Xenon liquido ed è letto da una matrice di 846 fototubi Hamamatsu mod. R9869 [37], sensibili alla luce ultravioletta grazie ad una finestra di quarzo (silicato fuso), e sviluppati appositamente per operare a temperature criogeniche in presenza di basso campo magnetico. La densità fotocatodica media è pari al 30% ed è massima sulla faccia d'ingresso in quanto i fotoni in media interagiscono e rilasciano gran parte della loro energia dopo aver attraversato pochi cm di Xenon liquido. La distribuzione dei fototubi sulle varie facce è mostrata in figura 2.18. Si noti che al centro della faccia *Outer* si trova un addensamento di fototubi, progettata per effettuare misure di calibrazione che utilizzano un generatore di neutroni (paragrafo 2.3.3) da porre sul retro del calorimetro. Per vincoli geometrici e di copertura in angolo solido il generatore di neutroni è stato tuttavia piazzato sul lato di COBRA opposto al calorimetro.

Le risoluzioni FWHM richieste per fotoni da 52.8 MeV sono $\Delta t = 150 \text{ ps}$ per la ricostruzione temporale, $\Delta\theta = 15 \text{ mrad}$ per l'incertezza angolare, $\Delta E_\gamma/E_\gamma = 4 \div 5\%$ per quella in energia [38].

Il *Large Prototype*

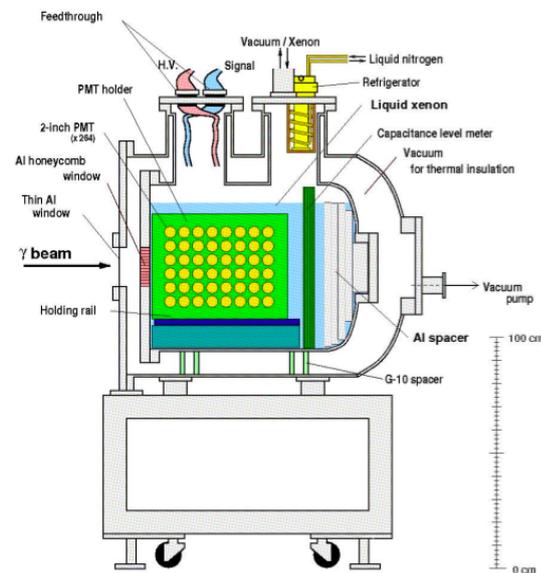


Figura 2.19: Rappresentazione schematica del *Large Prototype*.

Il prototipo di questo calorimetro è chiamato *Large Prototype (LP)* e fu costruito per comprendere in maniera più approfondita le proprietà dello Xenon liquido come mezzo di rivelazione di particelle ionizzanti. Le sue dimensioni sono $40 \times 40 \times 50 \text{ cm}^3$ ed equipaggiato con 264 PMT. Un disegno del LP è mostrato in figura 2.19.

Oltre alle dimensioni le differenze principali rispetto al calorimetro finale sono:

- la forma parallelepipedica (quasi cubica);
- i fotomoltiplicatori montati a pelo della superficie su tutte le facce (nel calorimetro finale i PMT nelle facce *Up* e *Down* sono svasati per mantenere l'asse parallelo al fascio);
- la maggiore densità fotocatodica, uniforme su tutte le facce;



- il materiale della faccia d'ingresso, costituita da G10 (una specie di vetronite) con una finestra centrale in acciaio sottile.

Il prototipo è stato costruito per ottenere informazioni utili sui materiali di cui è costituito il calorimetro finale, per studiare le proprietà fisiche e chimiche dello Xenon liquido, per collaudare le tecniche di ricostruzione degli eventi e per misurare la risoluzione del calorimetro. Esso ha consentito di studiare la calibrazione dei PMT a basse temperature ed ha fornito preziose informazioni sulla risposta del rivelatore a particelle α , raggi cosmici, fotoni di decine di MeV di energia etc. È stato inoltre utilizzato durante due *beam test* (ottobre 2003, ottobre 2004) per la misura delle risoluzioni [39, 40]. I valori ottenuti sono risultati di poco superiori a quelli richiesti per il calorimetro finale: $\Delta x \times \Delta y = 8 \text{ mm}^2$, $\Delta t = 140 \text{ ps}$, $\Delta E/E = 5\%$. Si noti che $\sim 50\%$ dei PMT utilizzati nel Large Prototype appartenevano ad una serie precedente a quella utilizzata nel calorimetro finale e caratterizzati da un'efficienza quantica minore ($\sim 5\%$ contro il $\sim 16\%$ della nuova serie).

2.3.2 La scintillazione dello Xenon

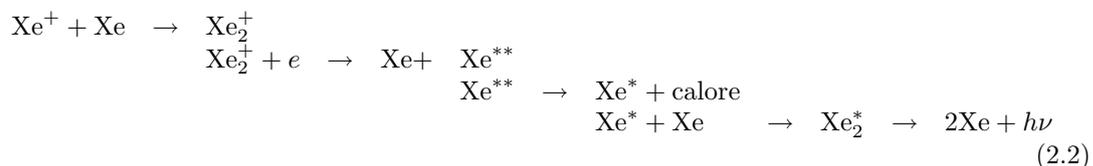
Lo Xenon è un gas nobile raro e presenta una temperatura di ebollizione pari a 165 K alla pressione di 1 atm (più elevata rispetto a 119.93 K del Kr o 87.3 K del Ar), un alto numero atomico ($Z = 54$) ed alta densità in fase liquida ($\rho = 2.95 \text{ g/cm}^3$). In virtù del valore elevato di ρ e Z , la lunghezza di radiazione risulta piuttosto piccola ($X_0 = 2.77 \text{ cm}$), il che consente la realizzazione di un calorimetro di dimensioni compatte. Le caratteristiche dello Xenon liquido come mezzo scintillatore sono:

- grande resa in luce di scintillazione (circa 40000 fotoni/MeV), confrontabile con quella dello NaI, che garantisce un'ottima risoluzione in energia;
- elevata trasparenza alla propria luce di scintillazione;
- brevi costanti di decadimento dei processi di scintillazione (4.2 ns, 22 ns, 45 ns);
- elevata omogeneità, che lo rendono preferibile ai cristalli nella realizzazione di un calorimetro con la geometria a C, necessaria per ottenere l'ingresso dei fotoni con direzione perpendicolare alla superficie.

Lo spettro di emissione della luce di scintillazione ha una forma approssimativamente gaussiana, con il massimo a 178 nm nel profondo ultravioletto (Vacuum Ultra-Violet, VUV) e $\sigma = 6 \text{ nm}$. Il meccanismo di scintillazione coinvolge sia atomi eccitati (Xe^*) che ioni (Xe^+):



oppure:



L'assenza dello stato fondamentale Xe_2 (un gas nobile esiste solo in forma atomica e non molecolare) garantisce un'elevata trasparenza dello Xenon alla propria luce di scintillazione in quanto la reazione $h\nu + \text{Xe}_2 \rightarrow \text{Xe}_2^*$ non può avvenire. La presenza di impurità, anche in



concentrazioni molto piccole, può però indurre un'attenuazione della luce tale da compromettere l'uniformità di risposta del calorimetro con importanti conseguenze sulla risoluzione in energia [36, 41]. In particolare le molecole di ossigeno (O_2) e di vapore acqueo (H_2O) presentano spettri di assorbimento attorno alla lunghezza d'onda di emissione dello Xenon, come mostrato in figura 2.20. In figura 2.21 è riportata la lunghezza di assorbimento dello Xenon in funzione della lunghezza d'onda, in presenza di impurezze con concentrazione di 1 ppm [42].

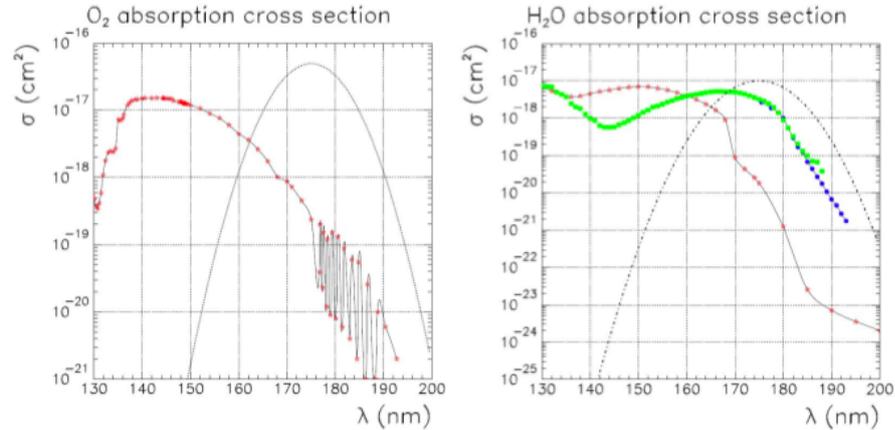


Figura 2.20: Sezione d'urto (cm²) di assorbimento per O_2 (sinistra) ed H_2O (destra), in fase liquida (rosso) e vapore (verde) in funzione della lunghezza d'onda della radiazione con sovrapposto lo spettro di emissione del LXe (blu).

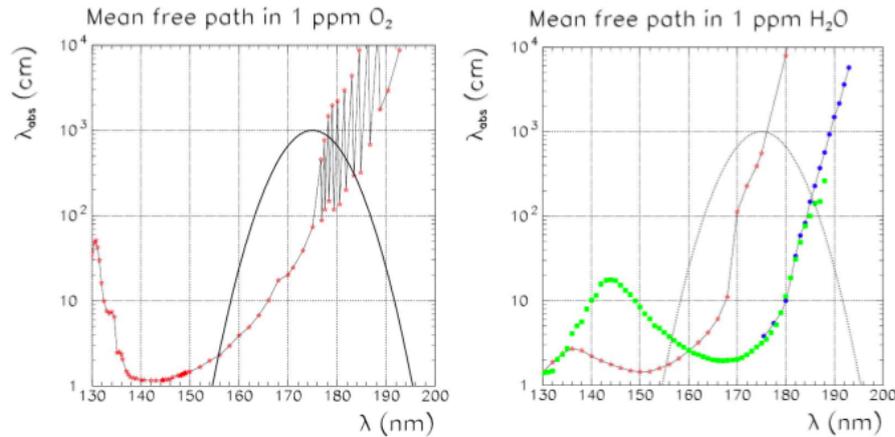


Figura 2.21: Lunghezza di assorbimento λ_{abs} (cm) dello LXe contaminato con 1 ppm di O_2 (sinistra) ed H_2O (destra), in fase liquida (rosso) e vapore (verde e blu) con sovrapposto lo spettro di emissione del LXe (blu).

È stato calcolato che la contaminazione da parte di tali molecole deve essere mantenuta al di sotto di qualche decina di parti per miliardo (ppb) per non avere un significativo peggioramento delle prestazioni del calorimetro [39]. È stato quindi progettato un sistema di purificazione dello Xenon che, attraverso il ricircolo in fase liquida o gassosa, consente di ridurre le impurità fino ad un valore inferiore alla soglia richiesta. La lunghezza di assorbimento del calorimetro



viene monitorata costantemente durante la presa dati utilizzando sorgenti α e fotoni da reazioni nucleari (si veda 2.3.3).

Le principali caratteristiche dello Xenon come mezzo scintillante sono riportate in tabella 2.2.

Parametro	Descrizione	Valore & Unità	Condizioni
Z	Numero Atomico	54	-
A	Numero di Massa	131.29 u.m.a.	-
T_b	Punto di liquefazione	165.1 K	1 atm
T_m	Punto di fusione	161.4 K	1 atm
ρ_{liq}	Densità	2.95 g/cm ³	165.35 K
T_c, P_c	Punto Critico	289.7 K, 58.4 bar	-
T_3, P_3	Punto Triplo	161.3 K, 0.816 bar	-
X_0	Lunghezza di radiazione	2.77 cm	Xe liquido
$-(dE/dx)$	Perdita di Energia	1.255 MeV · cm ² /g	-
n_{Xe}	Indice di rifrazione	1.6 ÷ 1.72	Xe liquido, $\lambda = 178$ nm
W_γ	Energia per γ di scintillazione	(21.7 ± 2.4) eV (19.6 ± 2.0) eV	per elettroni per particelle α
τ_s	Costante di decadimento di singoletto	22 ns	particelle α
τ_t	Costante di decadimento di tripletto	4.2 ns	particelle α
τ_r	Costante di decadimento di ricombinazione	45 ns	elettroni, γ
λ_{scint}	Picco di emissione luce di scintillazione Larghezza Spettrale FWHM	178 nm ~ 14 nm	-
λ_{att}	Lunghezza di attenuazione	≈ 40 cm	$\lambda = 178$ nm
λ_{abs}	Lunghezza assorbimento della luce di scintillazione	> 400 cm	-
λ_R	Lunghezza di diffusione Rayleigh	≈ 45 cm	$\lambda = 178$ nm
σ_{th}	Sezione d'urto totale per neutroni termici	(23.9 ± 1.2) barn	Composizione naturale

Tabella 2.2: Caratteristiche principali dello Xenon

2.3.3 Il sistema di calibrazione

L'esperimento MEG è un esperimento di precisione che utilizza un calorimetro innovativo le cui prestazioni devono essere elevate e stabili su scala di tempi di alcuni anni. Per questo motivo le calibrazioni dell'esperimento costituiscono un fondamentale fattore di qualità per MEG.

Durante la fase di presa dati vengono monitorate in particolare la stabilità e le risoluzioni del calorimetro. A tale scopo vengono acquisiti eventi di calibrazione con depositi di energia in posizioni note unitamente ad eventi generati mediante sorgenti di luce (LED).

Il sistema di LED

All'interno del calorimetro è installato un sistema di LED (12 postazioni LED, ognuna equipaggiata con 3 LED a diversa attenuazione) in grado di illuminare completamente i PMT in modo da poter determinare i loro guadagni. L'emissione è stimolata variando l'intensità luminosa dei LED. La varianza delle distribuzioni di carica di un PMT risulta proporzionale al suo guadagno g secondo la relazione:



$$\sigma^2 = g(q - q_0) + \sigma_0^2 \quad (2.3)$$

dove q è la carica del segnale, q_0 è la carica del piedistallo e σ_0 è la sua varianza. I guadagni sono determinati tramite un fit lineare alle coppie (q, σ^2) con un'incertezza inferiore al 4% sul singolo PMT da cui si può stimare un contributo alla risoluzione in energia del calorimetro inferiore all'1%.

Le sorgenti Alpha su filo

La conoscenza delle efficienze quantiche (QE) dei PMT è necessaria per la ricostruzione dell'energia. Le QE relative ad un gruppo di PMT di riferimento sono state misurate preliminarmente, in modo da disporre di un criterio per ottimizzare la disposizione dei PMT all'interno del calorimetro.

La determinazione accurata delle QE viene effettuata utilizzando sorgenti α di ^{241}Am depositate su cinque fili di tungsteno di diametro $100 \mu\text{m}$, 5 sorgenti per ogni filo. I fili sono posti parallelamente alla direzione del fascio ed ancorati alle facce laterali del calorimetro. L'attività di ogni singola sorgente è $\simeq 1000 \text{ Bq}$ per cui il loro impatto sulla normale acquisizione dati è trascurabile. Le sorgenti sono state realizzate impiantando l'Americio sulla superficie di una foglia di oro che è stata successivamente avvolta e fissata per compressione attorno ai fili (figura 2.22).

Le particelle α provenienti dal decadimento rilasciano interamente la propria energia ($\approx 5 \text{ MeV}$, con una coda a valori inferiori dovuta alle interazioni con il materiale della sorgente) all'interno del calorimetro in una regione $\sim 40 \mu\text{m}$ intorno alla propria posizione. Di conseguenza l'energia dell'evento e la sua collocazione nello spazio sono note e facilmente simulabili. Un confronto fra il numero di fotoelettroni previsto per un certo PMT da simulazioni Montecarlo ed il numero misurato sperimentalmente in un evento di particella α , fornisce una misura dell'efficienza quantica di questo PMT. Questa misura richiede la conoscenza indipendente del guadagno dei PMT che come abbiamo già osservato si può determinare utilizzando i LED. La variazione del numero di fotoelettroni in funzione della distanza tra il PMT e le varie sorgenti α consente inoltre di stimare l'assorbimento della luce all'interno del calorimetro, con conseguente monitoraggio della concentrazione di impurezze disciolte nello Xenon.

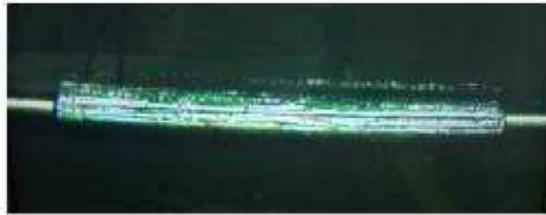


Figura 2.22: Sorgente di Americio inserita su un filo di diametro $\sim 100 \mu\text{m}$.

L'acceleratore Cockroft-Walton

Un elemento basilare e di grande versatilità del sistema di calibrazione di MEG è un acceleratore Cockroft-Walton (C-W) di protoni (figura 2.23) [43]. Le proprietà ottiche del fascio sono: sezione del fascio $\sim 3 \text{ cm}$, $\Delta\theta \sim 0.25^\circ$ a 3 metri dal punto di emissione, basso livello di raggi X garantito dal costruttore.

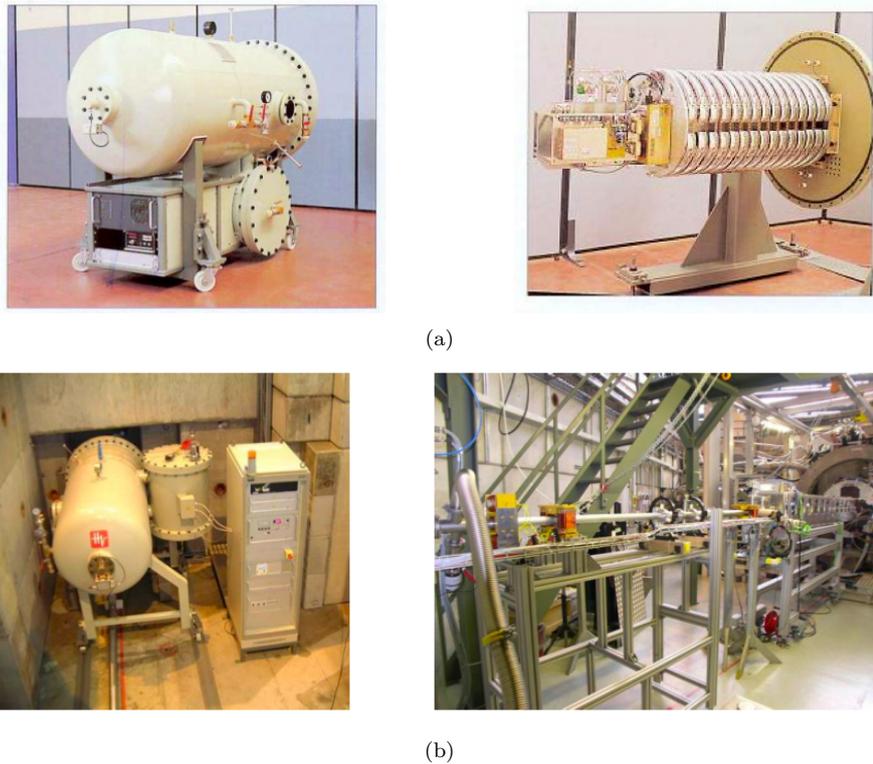


Figura 2.23: Acceleratore C-W: in (a) vista esterna (sinistra) ed interna (destra), in (b) la sua collocazione nell'area sperimentale (sinistra) e la linea di fascio del trasporto dei protoni con il *Bellow System* (destra).

Il bersaglio è fissato all'estremità della linea del fascio dei protoni che, durante la calibrazione, viene inserito in modo automatico all'interno di COBRA dal lato a valle del bersaglio. Il normale bersaglio dei μ viene spostato in una posizione di riposo che non interferisca con la calibrazione tramite un sistema pneumatico; al suo posto viene inserito il bersaglio per i protoni utilizzando un braccio meccanico con sistema a mantice (*Bellow System*).

Questa calibrazione viene effettuata con due tipi diversi di bersagli: Fluoruro di Litio (LiF) e Tetraborato di Litio ($\text{Li}_2\text{B}_4\text{O}_7$). La reazione $p+\text{Li} \rightarrow \text{Be}+\gamma$ ha una risonanza per $E_p = 440$ KeV con una larghezza pari a $\Gamma \approx 15$ KeV. Il fotone emesso ha una energia di 17.6 MeV, tre volte inferiore all'energia di un fotone di segnale e tre volte superiore alle energie delle α .

La reazione $p+\text{B} \rightarrow \text{C}+\gamma$ crea una risonanza per $E_p = 163$ KeV con righe γ da 16.1, 11.7, 4.4 MeV, anche se con sezione d'urto molto più bassa di quella della reazione sul Li. È importante notare che le righe da 4.4 ed 11.7 MeV sono emesse simultaneamente, per cui possono essere utilizzate per la calibrazione temporale relativa tra calorimetro e Timing Counter. Uno schema riassuntivo delle reazioni di protoni su bersagli di Litio e Boro è riportato in tabella 2.3.

Il segnale indotto in queste reazioni nucleari è particolarmente pulito in quanto solo i γ emergono dal bersaglio, mentre α , protoni o ioni si arrestano in esso; inoltre l'energia dei protoni è inferiore alla soglia per la produzione di neutroni. I γ sono prodotti con distribuzione angolare praticamente isotropa a partire dal centro del rivelatore; con questo metodo è possibile calibrare uniformemente tutta la faccia d'ingresso (*Inner*) del calorimetro.



Reazione	Energia del picco	Sezione d'urto del picco	Righe di emissione
Li(p, γ)Be	440 keV	5 mb	(17.6, 14.6) MeV
B(p, γ)C	163 keV	$2 \cdot 10^{-1}$ mb	(4.4, 11.7, 16.1) MeV

Tabella 2.3: Reazioni utilizzate con il C-W e rispettive linee di emissione.

Occorre infine notare che il C-W può essere utilizzato molto frequentemente (2 ÷ 3 volte la settimana) perché i tempi di approntamento e transizione dalla normale acquisizione dati alla calibrazione e viceversa sono molto brevi (~ 30 minuti) e non richiedono interventi sul fascio dei μ (ad eccezione dello spostamento del bersaglio).

La reazione di cambio scarica (CEX)

L'unico modo semplice per inviare fotoni con energia vicina a 52.8 MeV nel calorimetro (l'energia del fotone nel decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$) è utilizzare i fotoni del decadimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ [43]. Il π^0 ha spin 0 e decade nel 98.8% dei casi in due fotoni monocromatici di energia pari a 67.49 MeV, emessi con una distribuzione angolare isotropa nel sistema di quiete del pione. I π^0 vengono prodotti dalla reazione di scambio carica di π^- su protone:



La reazione avviene quando il π^- è a riposo nel laboratorio. La linea di fascio $\pi E5$ può essere regolata, variando corrente e polarità dei magneti, in modo da inviare π^- da 70 MeV/c su un bersaglio di idrogeno liquido che sostituisce il bersaglio sottile per i μ ⁷. La reazione libera circa 4 MeV ed il pione uscente acquista un'energia cinetica di ≈ 2.9 MeV per cui i fotoni prodotti dal decadimento del π^0 non sono più monocromatici. La loro distribuzione in energia risulta comunque piatta:

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{2\beta\gamma(M_{\pi^0}/2)} \quad (2.5)$$

dove β è la velocità del π^0 (in unità di c) nel laboratorio e γ il corrispondente parametro di Lorentz. L'energia del fotone nel sistema del laboratorio è compresa nell'intervallo (54.9, 82.9) MeV e la relazione tra l'energia e l'angolo Θ relativo tra i due fotoni prodotti dal decadimento del π^0 risulta essere:

$$E_\gamma = \frac{M_{\pi^0}}{2}\gamma \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma^2(1 - \cos \Theta)}} \right) \quad (2.6)$$

con $\Theta \geq 157^\circ$.

Questa relazione può essere convenientemente utilizzata per definire l'energia di un fotone se si conosce la direzione del secondo. È perciò necessaria la rivelazione di quest'ultimo mediante un calorimetro ausiliario, costituito da una matrice 3×3 di cristalli di NaI, collocato diametralmente opposto al calorimetro LXe rispetto al bersaglio. Il calorimetro a Ioduro di Sodio è libero di muoversi, tramite un supporto mobile, in locazioni ben definite corrispondenti a particolari posizioni individuate sulla faccia *Inner* (figura 2.24). Tali locazioni sono definite a livello di trigger tramite raggruppamenti di 9 PMT (3×3), chiamati *patch*.

⁷Si noti che una calibrazione di questo tipo non può essere effettuata durante la normale presa dati.



La faccia *Inner* del calorimetro viene quindi suddivisa in 24 *patch* (3 colonne e 8 righe). In questo modo è possibile calibrare tutto il calorimetro selezionando γ monocromatici nelle diverse zone della faccia d'ingresso.

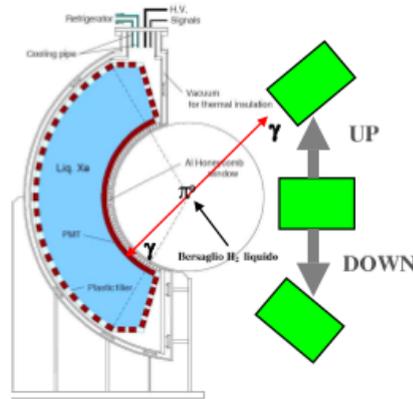


Figura 2.24: Schema della disposizione del calorimetro NaI (in basso la fotografia del suo supporto con l'indicazione dei possibili movimenti del rivelatore) e del bersaglio di idrogeno all'interno del rivelatore; l'asse z corrispondente alla direzione del fascio è entrante nel foglio.

Il generatore di neutroni

Il generatore di neutroni è un sistema di monitoraggio della risposta del calorimetro. La caratteristica unica di questo metodo è la possibilità di essere utilizzato in maniera impulsata, rendendo possibile monitorare anche durante la presa dati dell'esperimento. Il generatore produce neutroni da 2.5 MeV dalla reazione Deuterio-Deuterio che vengono successivamente moderati all'interno di una struttura di polietilene. Lastre di Nickel inserite nel moderatore catturano i neutroni termici, emettendo fotoni da 9 MeV per diseccitazione nucleare che forniscono il segnale di calibrazione.



2.4 Il trigger di MEG

Il sistema di trigger dell'esperimento MEG utilizza i segnali provenienti dai fototubi del calorimetro e del Timing Counter per la selezione degli eventi. Le informazioni delle camere a deriva non vengono utilizzate a causa del lungo tempo di integrazione ($\sim 0.5 \mu\text{s}$) necessario per la formazione del segnale. Il sistema si basa sull'impiego di schede elettroniche in standard VME su cui sono installati FADC (**F**lash **A**nalog to **D**igital **C**onverters) per il campionamento del segnale e FPGA (**F**ield **P**rogrammable **G**ate **A**rrays) per l'analisi delle informazioni digitalizzate, che vengono registrate su memoria SRAM (**S**tatic **R**andom **A**ccess **M**emory⁸). Lo schema della catena elettronica è illustrato in figura 2.25(a). Nella figura 2.25(b) è illustrata la struttura ad albero del trigger, organizzata su tre livelli.

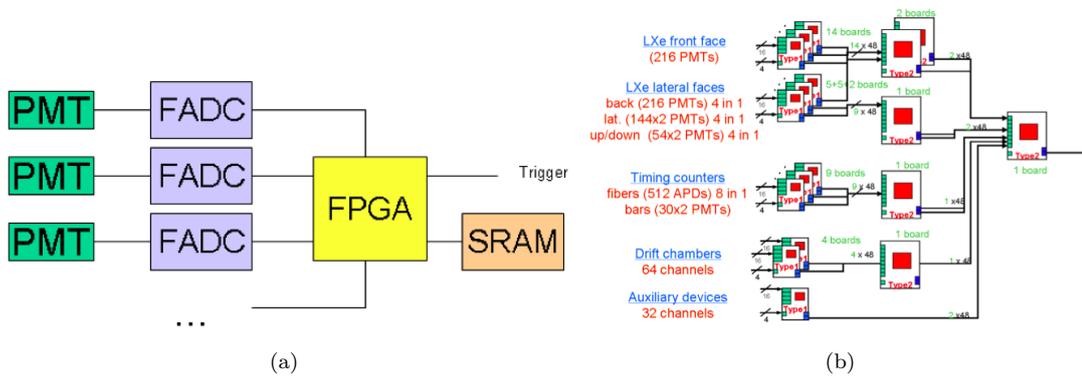


Figura 2.25: Trigger MEG: in (a) lo schema della catena elettronica e in (b) i livelli in cui è organizzato.

Il sistema di trigger dell'esperimento MEG è molto versatile e può essere programmato per ottenere fino a 32 differenti configurazioni dei segnali. Oltre al trigger $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ sono stati infatti implementati numerosi trigger per le operazioni di calibrazione e monitoraggio dell'apparato e per la misura dei fondi dell'esperimento (decadimento radiativo, positroni di Michel, fotoni singoli, etc.). Le variabili di interesse per la generazione del segnale di trigger $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ sono:

- energia del fotone;
- direzione di ingresso del fotone nel calorimetro;
- punto di impatto del positrone sul Timing Counter;
- correlazione temporale $e^+ - \gamma$;
- correlazione spaziale $e^+ - \gamma$.

L'energia dei fotoni viene determinata sommando la luce raccolta da tutti i PMT del calorimetro, mentre una ricostruzione approssimata della direzione di volo è ottenuta dalla posizione del PMT che raccoglie la massima luce sulla faccia d'ingresso. Tramite simulazione Montecarlo è stato valutato che la direzione determinata con tale ricostruzione approssimata è contenuta entro $\pm 3.5^\circ$ rispetto alla reale linea di volo, con un'efficienza maggiore del 99%. Il fronte di salita dello stesso fototubo fornisce infine una stima del tempo di prima interazione del fotone.

⁸Un tipo di RAM molto veloce e con bassa dissipazione, che consente di mantenere le informazioni per un tempo molto lungo.

Il tempo di arrivo del positrone è misurato dal Timing Counter, mentre il punto d'impatto su di esso fornisce approssimativamente la direzione di emissione: grazie all'emissione a 180° delle due particelle ed alla presenza del campo magnetico la direzione di emissione del fotone è infatti in corrispondenza con una regione specifica del TC, determinata tramite la simulazione Montecarlo ed inserita nel database in una *lookup table*. Utilizzando la correlazione angolare è possibile ottenere un'ulteriore fattore ~ 10 nella reiezione degli eventi di fondo. In figura 2.26 sono mostrate la logica del trigger $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ed il tempo di latenza del sistema di trigger durante le varie fasi di elaborazione del segnale logico (≈ 230 ns). Aggiungendo il ritardo dovuto alla trasmissione dati tra i livelli, la latenza totale è ≈ 400 ns. La frequenza di eventi attesi che superano le condizioni di trigger può essere valutata nel modo seguente:

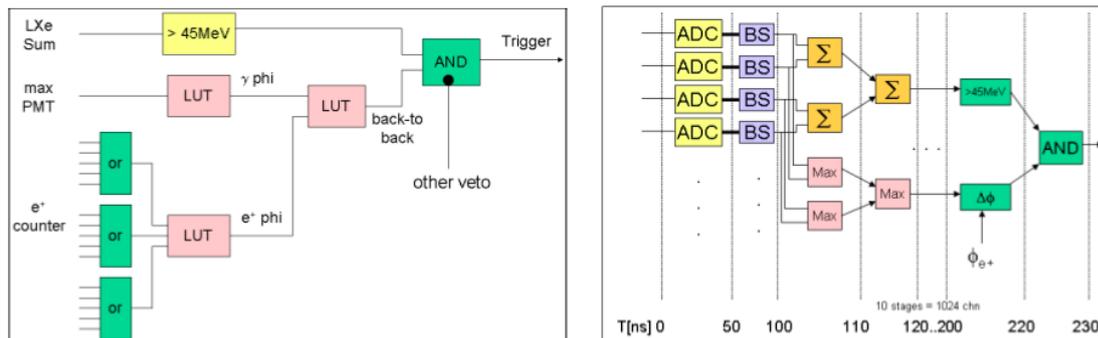


Figura 2.26: A sinistra la logica del trigger $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ e a destra i suoi tempi di latenza nelle varie fasi.

- si assuma una frequenza di arresto dei muoni nel bersaglio pari a $R_\mu \approx 3 \cdot 10^7$ Hz;
- il calorimetro ha un'accettanza geometrica nell'intervallo di interesse del 10%, per cui la frequenza degli eventi si riduce a $R_{LXe} \approx 3 \cdot 10^6$ Hz;
- richiedendo che il fotone rilasci nel calorimetro almeno 45 MeV, la frequenza diminuisce di un fattore $\sim 10^3$, per cui diventa $R_{LXe} \approx 3 \cdot 10^3$ Hz;
- la frequenza dei segnali dei positroni nel Timing Counter è circa 1 MHz e richiedendo una coincidenza temporale fotone-positrone entro 20 ns si ottiene un'ulteriore riduzione della frequenza di trigger: $R_f = R_{LXe} \cdot R_{TC} \cdot \Delta T = 3 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 10^6 \text{ Hz} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 60 \text{ Hz}$ (nel calcolo vengono presi in considerazione solo gli eventi accidentali, che sono predominanti rispetto a quelli correlati);
- imponendo infine che il fotone ed il positrone siano emessi in direzione opposta ed utilizzando la *lookup table* discussa precedentemente, si ottiene un ulteriore decremento di un fattore 10, per cui la frequenza finale di trigger è attesa essere $R_f \approx 6$ Hz.

La frequenza di eventi misurata sperimentalmente nel 2009 è di ≈ 6 Hz, in accordo con le previsioni.

2.5 Il sistema di acquisizione dati (DAQ) di MEG

Il sistema di acquisizione dati (**Data Acquisition System**, DAQ) dell'esperimento MEG deve essere in grado di soddisfare determinati requisiti:



- misurazione accurata della carica dei segnali;
- risoluzione temporale $\sigma_t = 40$ ps;
- grande numero di canali (~ 3000);
- reiezione del pile-up da un fondo di decadimenti di $\sim 10^8 \mu/s$ in un calorimetro non segmentato.

Per far fronte a queste esigenze è stato sviluppato un chip chiamato **Domino Ring Sampling** (DRS) che consente un'elevata frequenza di campionamento e sufficiente range dinamico (12 bit) ad un costo contenuto. Uno schema del sistema di acquisizione dati è mostrato in figura 2.27.

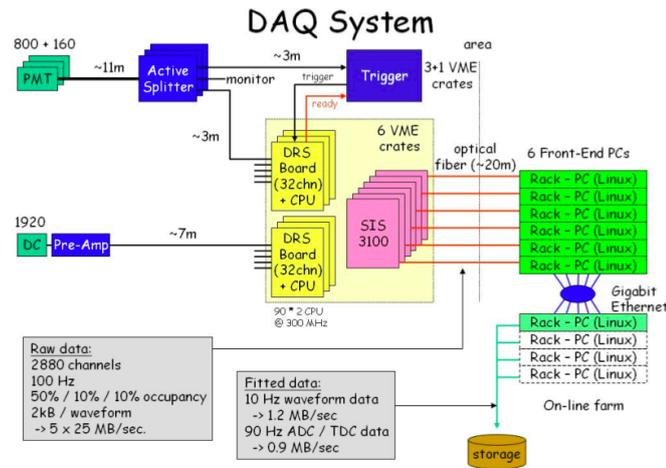


Figura 2.27: Schema del sistema di acquisizione dati.

2.5.1 Il chip *Domino Ring Sampling* (DRS)

Il **Domino Ring Sampling 4** (DRS4) [44] è un chip SCA (**S**witched-**C**apacitor **A**rray) a 10 canali, ciascuno con 1024 celle di campionamento capacitive. La digitizzazione delle forme d'onda è operata con una frequenza che varia da 0.5 GHz a 4.5 GHz. Data la difficoltà nel generare e distribuire un segnale di clock esterno di tale frequenza, il segnale di campionamento viene generato direttamente nel chip e si propaga in maniera libera tramite una catena di invertitori (*principio domino*). La velocità dell'onda domino è controllata da un potenziale esterno, in modo tale che la catena di invertitori può essere vista come un **V**oltage **C**ontrolled **O**scillator (VCO). L'onda domino corre in maniera continua in senso circolare (da cui il nome Domino Ring Sampling) e può essere fermata in qualsiasi istante con un segnale di trigger esterno. Uno schema semplificato del chip è mostrato in figura 2.28(a).

Dato che la velocità dell'onda domino dipende da molti fattori come temperatura e tensione di alimentazione, viene utilizzato un circuito PLL (**P**hase **L**ocked **L**oop) esterno per sincronizzare la frequenza con quella di un preciso oscillatore al quarzo. Distribuendo questo segnale di riferimento a tutti i chip dell'esperimento, è possibile far ruotare le onde domino di tutti i chip con la stessa fase e frequenza, con un *jitter* di ~ 200 ps. Una volta ricevuto un segnale di stop del trigger, il contenuto delle celle di campionamento viene congelato, letto sequenzialmente da

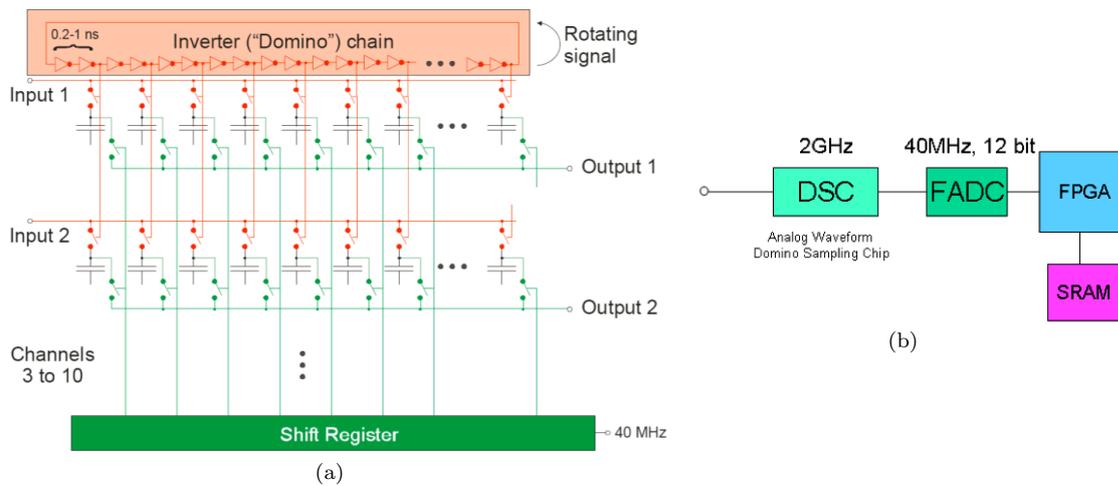


Figura 2.28: Schema del DRS: in (a) il suo principio di funzionamento, in (b) il flusso dei dati.

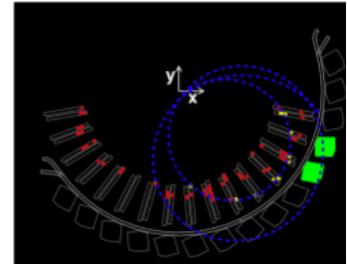
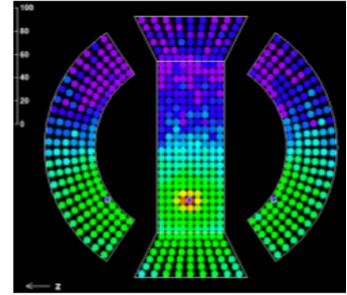
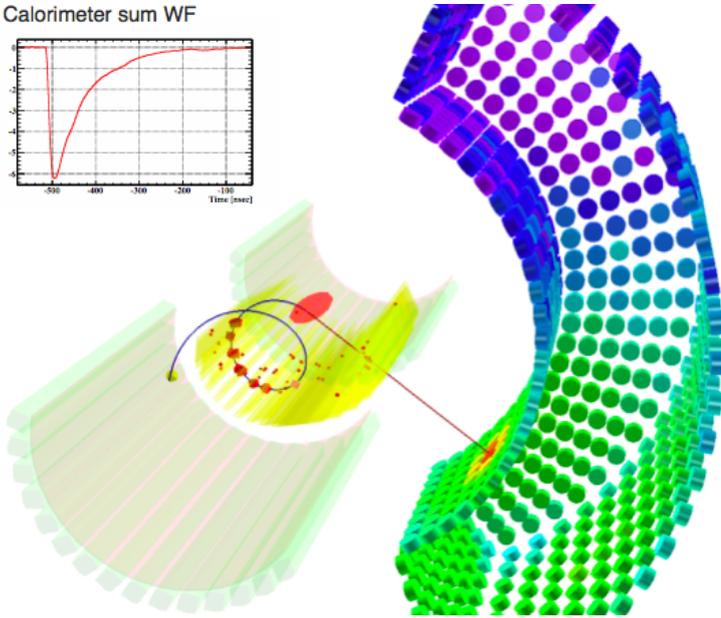
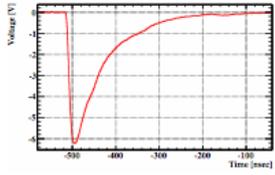
uno *shift register* ad una frequenza di 40 MHz, digitizzato esternamente da un flash ADC a 12 bit ed inviato ad una memoria SRAM (vedere figura 2.28(b)).

Il DRS utilizza una lettura in corrente (proporzionale al voltaggio nella cella di campionamento) che consente un buon rapporto segnale/rumore. Un segnale di *master clock* con un periodo di 51.44 ± 0.01 ns (una precisione di 0.02%) viene inoltre inviato a tutti i chip per poter operare un'ulteriore calibrazione *offline* allo scopo di raggiungere la risoluzione temporale di 150 ps FWHM richiesta per l'esperimento MEG.



Parte II
Analisi Dati

Calorimeter sum WF



Capitolo 3

I metodi di ricostruzione degli eventi nel calorimetro elettromagnetico

In questo capitolo si discuterà lo stato attuale dell'analisi per la ricostruzione delle variabili cinematiche del fotone a partire dalla carica raccolta sui fotomoltiplicatori. Dopo una breve presentazione della tecnica di ricostruzione per il tempo e la posizione (paragrafo 3.1), si presenterà quella in energia (paragrafo 3.2) su cui si è concentrato il lavoro di tesi.

3.1 La ricostruzione in tempo e posizione degli eventi

La ricostruzione in tempo del fotone è legata a quella in posizione, in quanto è necessario conoscere il punto d'interazione di un fotone entrante nel calorimetro. Per determinare la posizione del fotone incidente è importante definire la dimensione dell'evento in modo che la ricostruzione sia il meno possibile influenzata dalle fluttuazioni di sciame. Per questo motivo la ricostruzione del punto d'interazione del fotone viene eseguito in due passaggi.

- individuazione della posizione del picco della distribuzione di luce nella faccia d'ingresso;
- determinazione del punto d'interazione del fotone tramite un processo iterativo.

Una volta individuato il valore massimo della distribuzione di luce dei PMT della faccia *Inner*, la posizione (u, v) viene determinata attraverso un fit locale ristretto ad un intorno del punto di massimo ottimizzato attraverso la simulazione Montecarlo. Il valore appena calcolato viene utilizzato come nuovo picco della distribuzione di luce ed il procedimento viene iterato fino a quando la posizione del picco non converge.

La profondità (w) viene determinata in base alla larghezza, proiettata sulla faccia *Inner*, della distribuzione di luce dei PMT che hanno raccolto una carica superiore ad una certa soglia.

3.1.1 L'algoritmo per la ricostruzione in tempo

La ricostruzione del tempo del fotone utilizza il pacchetto MINUIT per minimizzare lo scarto tra il tempo atteso ed il tempo misurato da ciascun fototubo del calorimetro a xenon liquido. In

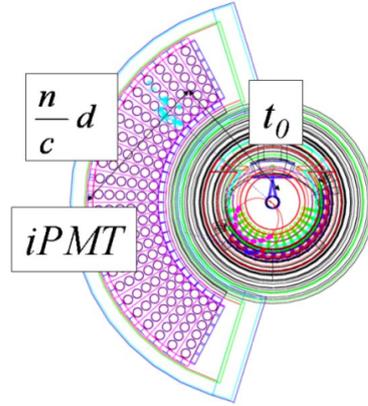


Figura 3.1: Illustrazione schematica del tempo che intercorre tra la generazione di un fotone di segnale e l'arrivo del primo fotone di scintillazione sull' i -esimo PMT.

figura 3.1 è mostrato uno schema della tecnica utilizzata per calcolare il tempo che intercorre tra l'emissione di un fotone nel bersaglio e l'arrivo del fotone di scintillazione sull' i -esimo PMT.

Il tempo impiegato dai fotoni di scintillazione (velocità della luce nel mezzo c/n , n indice di rifrazione) per arrivare dalla posizione di produzione (x_0, y_0, z_0) all'interno del calorimetro a quella del i -esimo fotomoltiplicatore $(x_{PMT_i}, y_{PMT_i}, z_{PMT_i})$ è dato da:

$$\Delta t = t_i - t_0 = \frac{n}{c} \sqrt{(x_0 - x_{PMT_i})^2 + (y_0 - y_{PMT_i})^2 + (z_0 - z_{PMT_i})^2} \quad (3.1)$$

In questa equazione, tuttavia, si assume implicitamente che

- l'interazione del fotone entrante nel calorimetro avvenga all'istante t_0 , nel punto (x_0, y_0, z_0) , con rilascio di tutta l'energia;
- i fotoni prodotti per scintillazione vengano emessi istantaneamente e percorrano esattamente la distanza geometrica tra il punto d'interazione e l' i -esimo PMT.

Queste ipotesi sono chiaramente approssimative. Il fotone entrante non rilascia tutta la sua energia nel punto d'interazione, ma lungo il suo percorso producendo uno sciame elettromagnetico. I fotoni di scintillazione hanno una emissione di tipo esponenziale ($\tau \approx 45$ ns) e sono soggetti sia alla diffusione per scattering Rayleigh che ad effetti di riflessione ed assorbimento. Tenendo conto degli effetti di fotostatistica e di dilatazione del cammino dei fotoni di scintillazione dovuta alla diffusione Rayleigh, la forma corretta della (3.1) utilizzata nel calcolo è:

$$t_i = t_0 + \frac{n}{c} f_{\text{EFFDIST}}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) + \tau \log \left(\frac{n_{phe_i}}{n_{phe_i} - 1} \right) \quad (3.2)$$

L'ultimo termine dell'equazione è di tipo statistico e tiene conto del ritardo medio indotto dalla struttura temporale dell'emissione dei fotoni di scintillazione (n_{phe_i} è la carica in fotoelettroni raccolta dal fototubo i -esimo¹ e τ il tempo di scintillazione). f_{EFFDIST} è una funzione fenomenologica, stimata tramite simulazioni Montecarlo, che determina la distanza effettiva percorsa dal fotone di scintillazione, partendo dalla distanza geometrica tra il fototubo ed il punto di prima interazione all'interno del calorimetro e tenendo conto degli effetti di scattering.

¹ n_{phe_i} si ricava dalla carica misurata q_i , correggendo per il guadagno e l'efficienza quantica del PMT.

3.2 La ricostruzione in energia

3.2.1 Il metodo *Xecenetotalsum* e la risoluzione energetica relativa

La ricostruzione dell'energia viene eseguita con un algoritmo chiamato *xecenetotalsum* (XET). Questo algoritmo consiste nel sommare le cariche q_i raccolte da ogni fototubo, corrette per il guadagno (G_i) e l'efficienza quantica (QE_i), pesando il contributo di ciascun PMT con la copertura fotocatodica locale della faccia a cui appartiene il PMT stesso (w_i). La somma così ottenuta (n_{SUM}) viene ulteriormente corretta per una funzione empirica della posizione, $f(u, v, w)$, in modo da correggere le disuniformità del calorimetro:

$$\tilde{n}_{SUM} = f(u, v, w)n_{SUM} = f(u, v, w) \left(\sum_{i=0}^{845} n_{phe_i} \right) = f(u, v, w) \left(\sum_{i=0}^{845} \frac{q_i w_i}{G_i QE_i} \right) \quad (3.3)$$

$\{u, v, w\}$ sono le coordinate rettangolari equivalenti, ottenute per trasformazione conforme da $\{x, y, z\}$ come descritto in figura 2.17(b) a pagina 36. La funzione correttiva viene stimata tramite la calibrazione CEX mappando il calorimetro in ogni *patch*. Questa tecnica di analisi richiede una continua calibrazione, in quanto f può variare nel tempo. Il monitoraggio delle variazioni temporali di f è eseguito utilizzando gli eventi di calibrazione C-W con bersaglio a Li (fotoni da 17.6 MeV).

La risoluzione in energia dei fotoni ottenuta finora è, come mostrato nella figura 3.2(a), $\sigma_R \simeq 1.85\%$. σ_R è la σ a destra della *gaussiana con coda* usata come funzione di fit: a destra del picco la σ è costante mentre a sinistra è descritta da un polinomio di secondo grado. D'ora in poi si quoterà solo la σ_R che è più significativa della larghezza a metà altezza perché la distribuzione in energia del fondo di γ è esponenzialmente decrescente (si veda figura 1.10 a pagina 22) fino a $E_\gamma = m_\mu/2$.

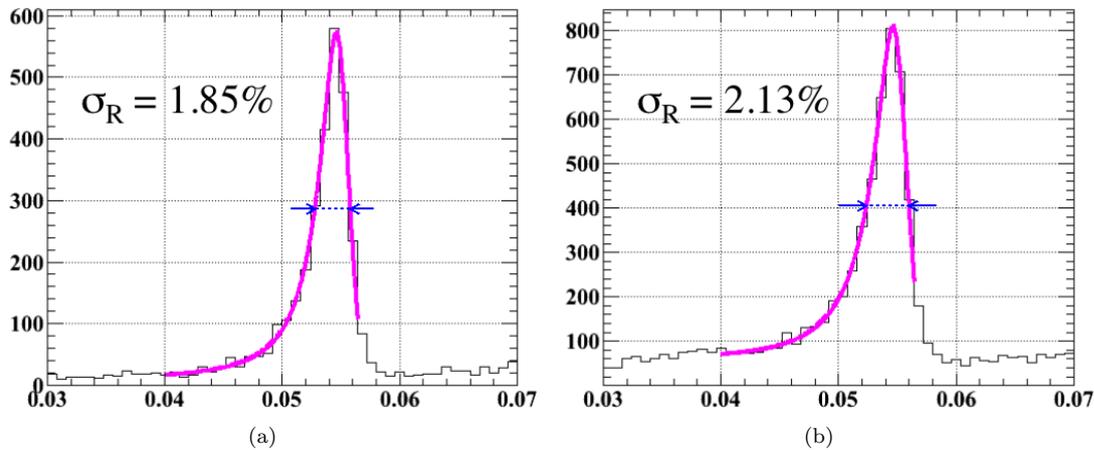


Figura 3.2: Ricostruzione dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX con sovrapposta un'interpolazione fenomenologica (linea magenta) usando XET. In (a) sono esclusi gli eventi ricostruiti entro 2 cm dal bordo della faccia interna ($w < 2$ cm), in (b) sono considerati tutti gli eventi.

Le curve in figura 3.2 sono ottenute utilizzando circa 25000 eventi di calibrazione con π^0 in una *patch* (8)² centrata in $u = 0$ cm e $v \simeq 27.8$ cm. Gli eventi vengono selezionati con una serie

²Si utilizza la *patch* 8 per avere le facce *Up* e *Down* simmetriche e le *Top* e *Bottom* asimmetriche, con la



di tagli di coincidenza con il rivelatore a NaI in modo da ottenere coppie di γ con angolo di emissione il più possibile vicino a 180° (vedere paragrafo 2.3.3). I tagli introdotti per selezionare fotoni a 55 MeV e misurare la risoluzione sono:

1. frazione di carica raccolta dal cristallo centrale del NaI maggiore del 60% della carica totale per restringere l'angolo relativo fra i γ ;
2. eliminazione degli eventi di Pile-Up tramite un algoritmo di ricerca dei cluster di PMT colpiti nel calorimetro;
3. eliminazione degli eventi meno profondi ($w < 2$ cm dalla faccia Inner).

L'ultimo taglio è necessario per eliminare gli eventi con maggiori difficoltà di ricostruzione perché troppo vicini ai fototubi della faccia d'ingresso. Infatti se un fotone rilascia energia molto vicino alla parete, la carica raccolta è molto diversa a seconda se il deposito di energia avviene di fronte ad un PMT o fra due di essi. La stessa situazione non si presenta nella faccia *Outer*, perché la profondità del calorimetro è $\simeq 16$ lunghezze di radiazione. In figura 3.2(b) possiamo notare come senza tale taglio la risoluzione in energia peggiori: $\sigma_R \simeq 2.13\%$.

3.2.2 Il *Linear Fit* (LF) e la risoluzione energetica relativa

Nello studio del *Large Prototype* (prototipo del calorimetro di MEG, descritto nel paragrafo 2.3.1 a pagina 38) è stato utilizzato anche un algoritmo per il calcolo dell'energia, chiamato *Linear Fit*, che aveva dato risultati migliori di XET [45].

Questo algoritmo, basato sul *Metodo delle componenti principali* (Principal Component Analysis, PCA) [46], ricostruisce l'energia utilizzando l'informazione raccolta dai singoli PMT, ma si differenzia da XET per le funzioni peso applicate ai fototubi. L'energia del fotone è scritta in approssimazione lineare come somma pesata delle cariche q_i raccolte da tutti i PMT:

$$E_l = c + \sum_{i=0}^{845} c_i q_i \quad (3.4)$$

I coefficienti c_i e la costante c sono determinati minimizzando il χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{MC\ events}^N (E_l - E_t)^2 \quad (3.5)$$

in cui si confronta il valore *linearizzato* dell'energia E_l con il deposito *vero* di energia E_t ottenuto da un campione di N (~ 20000) eventi Montecarlo. La procedura di minimizzazione è analitica e porta al seguente risultato:

$$c_i = \frac{M^{-1}}{N-1} \left[\sum_{MC\ events}^N E_t q_i \right] - \frac{1}{N} \sum_{MC\ events}^N E_t \sum_{MC\ events}^N q_i \quad (3.6)$$

$$c = \langle E_t \rangle - \langle E_l \rangle = \langle E_t \rangle - \left\langle \sum_{MC\ events}^N c_i q_i \right\rangle \quad (3.7)$$

Bottom più lontana. È stato verificato che le conclusioni raggiunte non cambiano nella *patch* 17, simmetrica alla 8, in cui *Top* e *Bottom* si scambiano.

dove le medie sono calcolate sul campione di eventi ed \mathcal{M} è la matrice di covarianza ottenuta a partire dagli eventi Montecarlo:

$$\mathcal{M}_{ij} = \langle (q_i - \langle q_i \rangle)(q_j - \langle q_j \rangle) \rangle \quad (3.8)$$

Tale procedura è chiamata *training* in quanto *insegna* al LF quali sono i coefficienti da applicare nella ricostruzione. Il LF è una tecnica del tutto versatile: infatti semplicemente cambiando le variabili nelle (3.6) e (3.7) è possibile determinare un set di coefficienti per ricostruire il punto di conversione e la direzione del fotone. Inoltre LF è un algoritmo rapido, efficiente, ad alta risoluzione e in linea di principio non necessita del taglio in profondità, quasi indispensabile per lo XET³. È importante sottolineare però, che le sue prestazioni dipendono in modo cruciale dalla qualità della simulazione MC. Se i dati misurati e quelli simulati nel MC non sono in buon accordo, la qualità del LF è notevolmente ridotta.

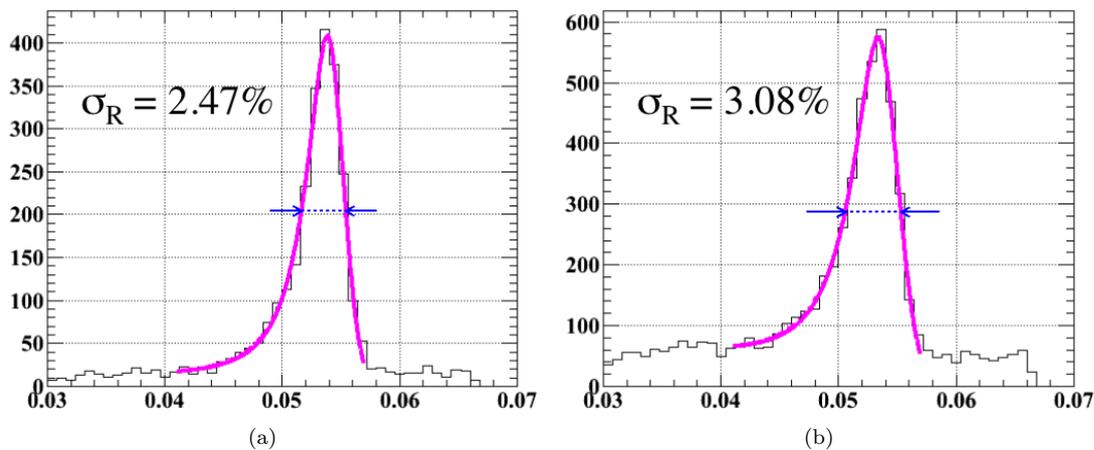


Figura 3.3: Ricostruzione dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX con sovrapposta un'interpolazione fenomenologica (linea magenta) usando LF. In (a) sono esclusi gli eventi ricostruiti entro 2 cm dal bordo della faccia interna ($w < 2$ cm), in (b) sono considerati tutti gli eventi.

Usando il *Linear Fit* come algoritmo di ricostruzione dell'energia dei dati di calibrazione di π^0 (sempre sulla *patch* 8) con i tagli riportati nel paragrafo 3.2.1, si ottengono le risoluzioni mostrate in figura 3.3: $\sigma_R \simeq 2.47\%$, con il taglio in profondità (figura 3.3(a)), e $\sigma_R \simeq 3.08\%$, senza il taglio in profondità (figura 3.3(b)). L'algoritmo risulta chiaramente peggiore dello XET. Questo risultato può essere spiegato osservando che le simulazioni non riproducono con sufficiente accuratezza i dati reali.

Le risoluzioni limite ottenibili dall'algoritmo possono essere valutate applicando i coefficienti ricavati dalla simulazione ad un set di eventi MC indipendenti, non utilizzati per il training. Il risultato è mostrato in figura 3.4: $\sigma_R \simeq 1.11\%$ con il taglio in profondità (figura 3.4(a)), e $\sigma_R \simeq 1.18\%$ senza tale taglio (figura 3.4(b)).

Si noti che le risoluzioni limite sono molto promettenti. La differenza fra le figure 3.3 e 3.4 suggerisce che il Montecarlo non simuli adeguatamente la realtà. Inoltre il fatto che, come visto nel paragrafo 2.3.1, il *Large Prototype* su cui è stato precedentemente testato LF avesse una forma

³XET, correggendo per una funzione empirica ricavata dalle misure di calibrazione, eredita le difficoltà di ricostruzione per fotoni vicini ai PMT, che peggiorano notevolmente la risoluzione. LF risulta meno sensibile a questo problema in quanto nel calcolo dei coefficienti gli eventi vicini ai PMT vengono pesati correttamente.

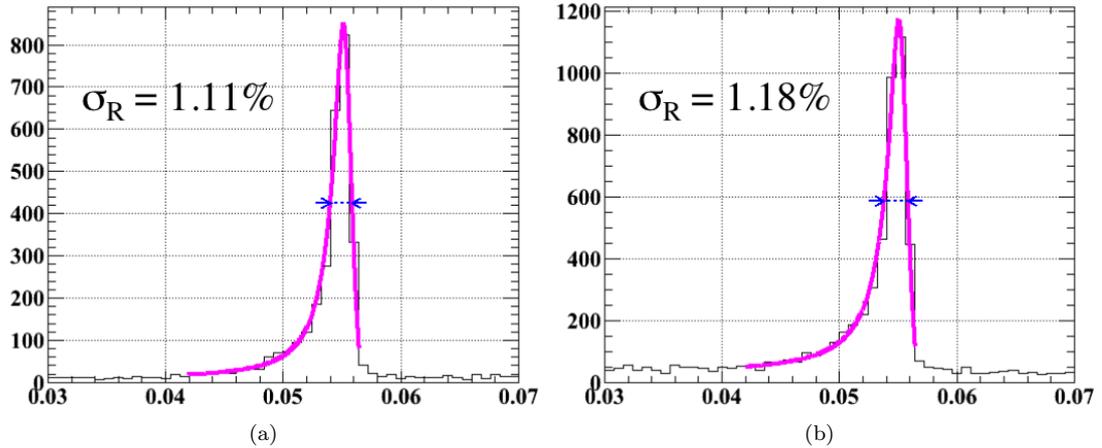


Figura 3.4: Ricostruzione dei fotoni simulati da 55 MeV con sovrapposta un'interpolazione fenomenologica (linea magenta). In (a) sono esclusi gli eventi ricostruiti entro 2 cm dal bordo della faccia interna ($w < 2$ cm), in (b) sono considerati tutti gli eventi.

parallelepipedica (altamente simmetrica) mentre lo XEC ha superfici curve e maggiori superfici riflettenti, suggerisce che un contributo importante possa derivare da una non buona trattazione delle riflessioni della luce di scintillazione sulle pareti del calorimetro. Nel prossimo paragrafo (3.2.3) si discuterà in dettaglio questa ipotesi.

3.2.3 Confronto della carica misurata negli eventi di π^0 con le simulazioni

Uno dei modi per valutare l'accordo fra simulazione e dati sperimentali è il confronto delle cariche misurate da ciascuna faccia (somma delle cariche dei PMT di tale faccia, corrette per guadagno ed efficienza quantica), mostrato in figura 3.5(a), e della carica totale (figura 3.5(b)). Anche per questi grafici si considerano *run* di π^0 sulla *patch* 8. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi.

Dalla figura 3.5(b) si osserva che, a parte un fattore di scala, le distribuzioni per la carica totale sono in ragionevole accordo, ma dalla figura 3.5(a) si nota, sia visivamente che esaminando i valori di χ^2/NdF , che nel dettaglio l'accordo non è altrettanto buono, soprattutto per la faccia Bottom (la faccia più lontana dall'interazione del fotone nel caso della *patch* 8).

Il Montecarlo è molto complesso ed utilizza numerosi parametri fisici per la descrizione della formazione dei segnali nel rivelatore. Quelli rilevanti per il trasporto della luce nel calorimetro a xenon liquido sono l'uscita in luce, la lunghezza di scattering Rayleigh (che è proporzionale alla quarta potenza della lunghezza d'onda della luce di scintillazione), la lunghezza di assorbimento della luce di scintillazione e le proprietà ottiche di riflessione sui PMT e sulle pareti.

Per la riflessione all'interfaccia LXe-Quarzo dei PMT si usano le formule di Fresnel con gli indici di rifrazione dipendenti dalla frequenza, mentre per le riflessioni sulle superfici delle pareti si utilizza un modello empirico tratto da misure eseguite nel laboratorio LENS di Firenze e verrà chiamato per comodità *Modello Firenze*. La riflettività dei materiali costituenti le pareti (Alluminio e PEEK) è stata misurata utilizzando un laser [47] con lunghezza d'onda vicina a quella di emissione dello LXe ed a vari angoli. La probabilità di riflessione è descritta fenomenologicamente dalla formula:

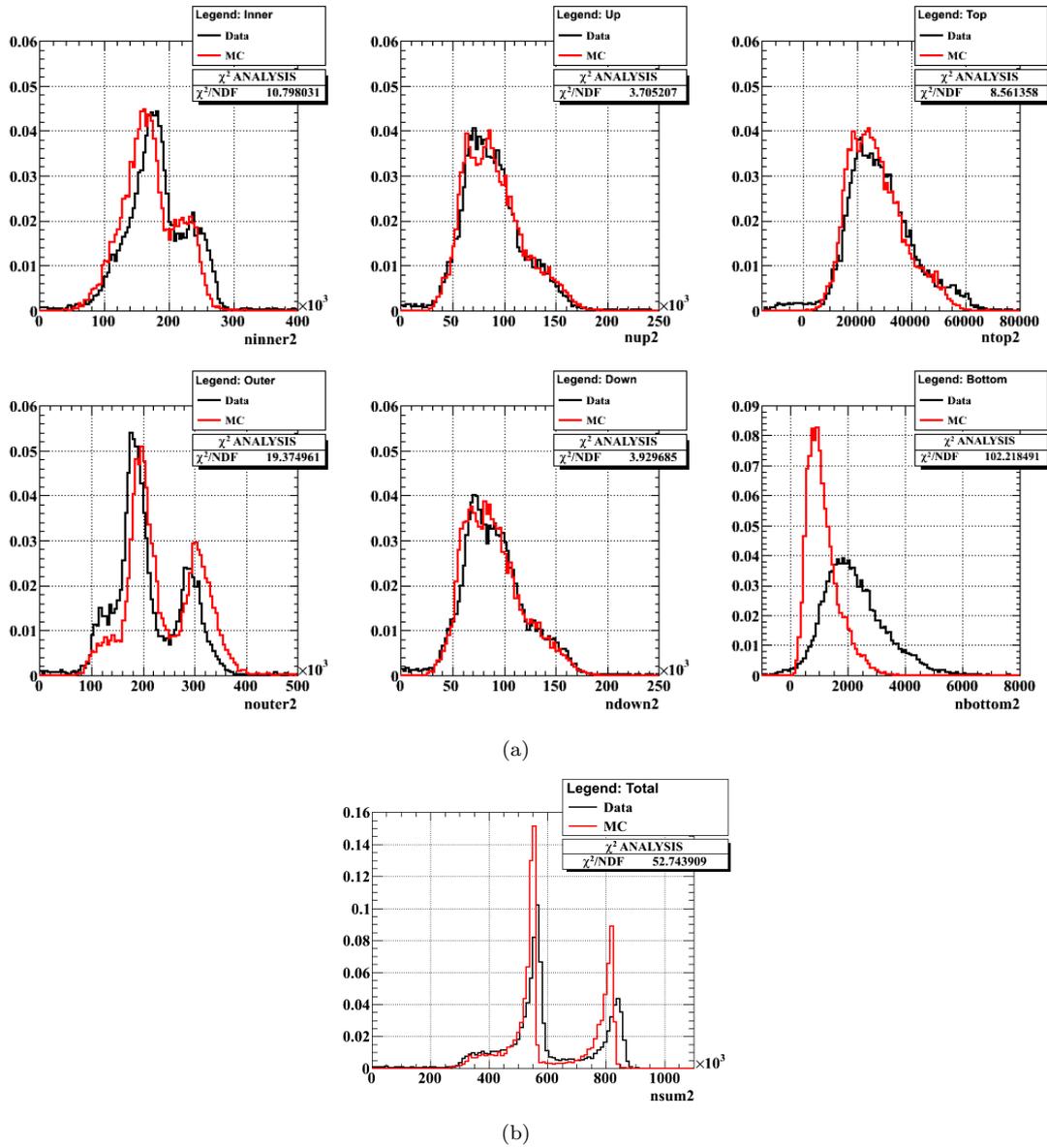


Figura 3.5: Distribuzioni delle cariche corrette per guadagno e QE per i dati (in nero) e per gli eventi Montecarlo (in rosso). In (a) il confronto faccia per faccia (per colonne dall'alto in basso, da sinistra a destra: Inner, Outer, Up, Down, Top, Bottom), in (b) la distribuzione in carica totale. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi.

$$R = R_{min} + R_{max} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_i - \pi/2}{\pi/6} \right)^2} \quad (3.9)$$

dove θ_i è l'angolo di incidenza rispetto alla normale. L'angolo di diffusione della luce riflessa rispetto alla direzione di incidenza viene estratto in approssimazione gaussiana tramite la formula:



$$\theta_d = \sigma \sqrt{-2 \log(x)} \sin(2\pi y) \quad (3.10)$$

dove σ è un parametro che varia a seconda se la superficie è alluminio o PEEK e x e y sono due numeri casuali con distribuzione uniforme.

Le R_{min} e R_{max} misurate per l'alluminio hanno valori rispettivamente 0.05 e 0.15 e per il PEEK 0.01 e 0.15 [48]. Tali valori sono però in disaccordo con altre misure riportate in letteratura [49], secondo cui la riflettività dell'alluminio intorno alle lunghezze d'onda di scintillazione dello xenon liquido ($\sim 160 \div 200$ nm) assume valori di $\sim 0.6 \div 0.8$.

Modificando indipendentemente la lunghezza di scattering Rayleigh λ_{Ray} (per $\lambda = 178$ nm), quella di assorbimento λ_{Abs} ed i parametri R_{max} e R_{min} della riflessione si è cercato di migliorare l'accordo tra simulazione e dati reali. In figura 3.5 sono mostrate le distribuzioni ottenute con la configurazione dei suddetti parametri in cui si è raggiunto il miglior accordo dati-MC. I valori utilizzati sono:

1. lunghezza di scattering Rayleigh: $\lambda_{Ray} = 65$ cm (per $\lambda = 178$ nm);
2. lunghezza di assorbimento: $\lambda_{Abs} = 800$ cm;
3. riflessione con limiti superiori e inferiori di riflettività raddoppiati, sia per l'alluminio ($R_{min} = 0.1$, $R_{max} = 0.3$), sia per il PEEK ($R_{min} = 0.02$, $R_{max} = 0.3$).

Questi valori, seppure ottimizzati per l'accordo dati-MC, non sono del tutto compatibili con i valori misurati per lo Xenon liquido (vedi tabella 2.2).

Per quanto riguarda le lunghezze di scattering Rayleigh e di assorbimento, sul *Large Prototype* è stata misurata sperimentale la somma dei loro reciproci, detta lunghezza di attenuazione [40]:

$$\frac{1}{\lambda_{Att}} = \frac{1}{\lambda_{Ray}} + \frac{1}{\lambda_{Abs}} \simeq \frac{1}{40 \pm 2.5} \text{ cm}^{-1} \quad (3.11)$$

Con la configurazione descritta in precedenza si ottiene però $\lambda_{Att} \simeq 60$ cm.

Nelle molte simulazioni eseguite è stato osservato come modificare i parametri della riflessione, porti a forti cambiamenti nelle distribuzioni dei fotoni faccia per faccia. Un esempio è mostrato nella figura 3.6 in cui sono state solo ulteriormente raddoppiate le R_{min} e R_{max} dell'alluminio per avvicinarle ai valori mostrati in [49] ($R_{min} = 0.2$, $R_{max} = 0.6$), lasciando intatti gli altri parametri.

Siamo quindi portati a concludere che uno dei possibili margini di miglioramento della simulazione potrebbe essere una trattazione più accurata delle riflessioni dei fotoni di scintillazione. Si noti, in particolare, che finora non si è tenuto in alcun conto la polarizzazione dei fotoni. Il modo in cui la polarizzazione dei fotoni di scintillazione viene introdotta nel MC è l'argomento del prossimo capitolo.

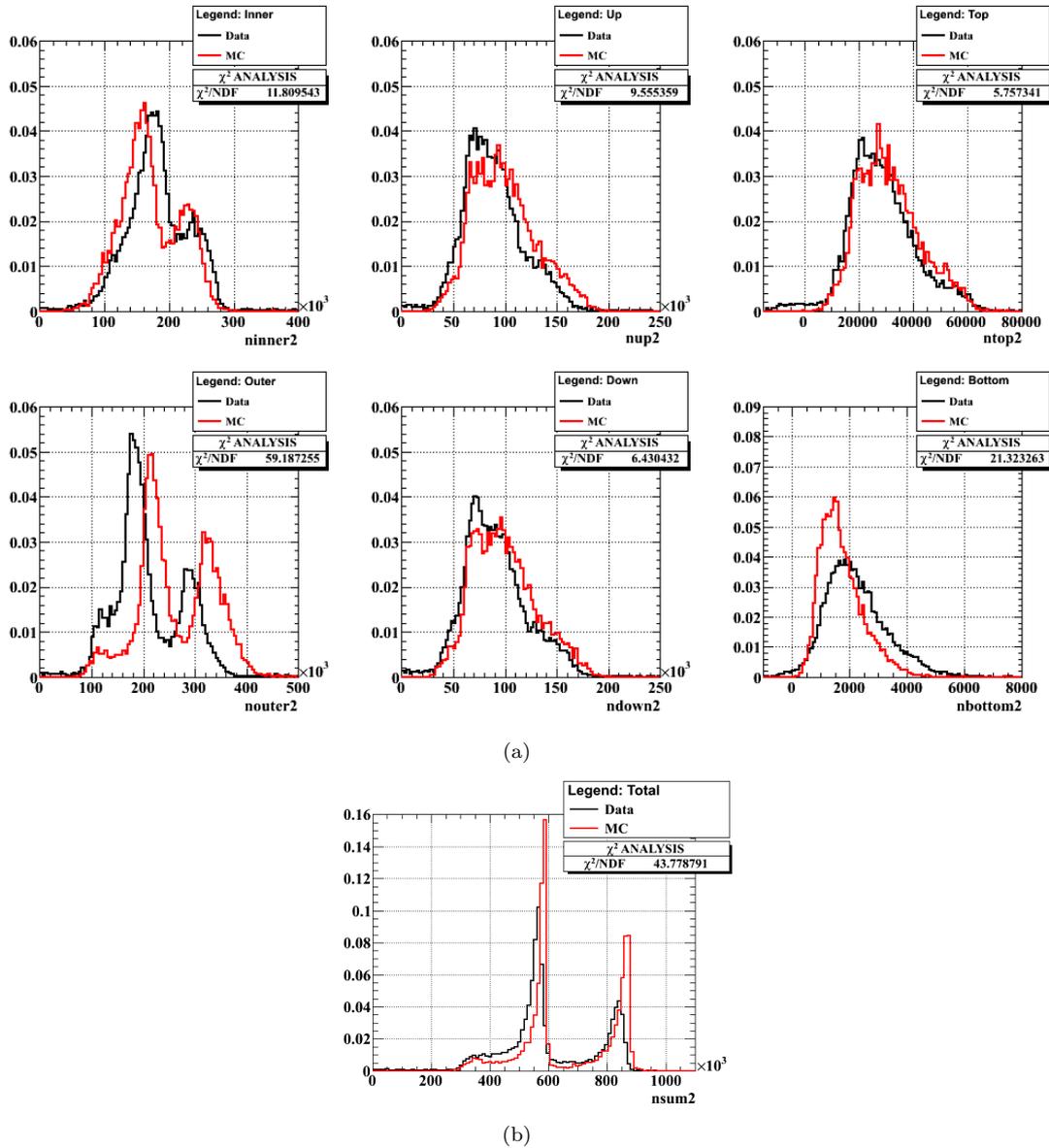


Figura 3.6: Distribuzioni delle cariche corrette per guadagno e QE per i dati (in nero) e per gli eventi Montecarlo (in rosso). In (a) il confronto faccia per faccia (per colonne dall'alto in basso, da sinistra a destra: Inner, Outer, Up, Down, Top, Bottom), in (b) la distribuzione in carica totale. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi. Rispetto alla figura 3.5, sono state ulteriormente raddoppiate le R_{\min} e R_{\max} dell'alluminio.



Capitolo 4

Parametrizzazione delle riflessioni con luce polarizzata nel calorimetro

Come osservato nel capitolo precedente (paragrafo 3.2.3), la simulazione del calorimetro a xenon liquido nel Montecarlo non è perfettamente in accordo coi dati e una delle ragioni potrebbe essere una non buona trattazione della riflessione. La simulazione di tale fenomeno fisico verrà modificata introducendo la dipendenza dalla polarizzazione dei fotoni di scintillazione nel trattamento delle riflessioni sui PMT e sulle pareti del calorimetro, finora non tenuta in considerazione¹.

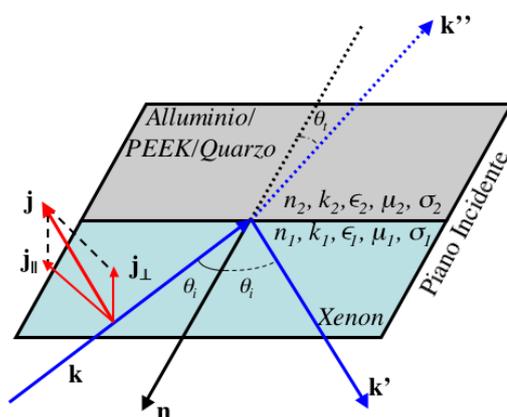


Figura 4.1: Geometria della riflessione polarizzata.

Come mostrato nella figura 4.1, si definisce il *piano d'incidenza* come il piano in cui giacciono

¹Il Montecarlo è stato impostato assumendo che la polarizzazione media dei fotoni di scintillazione sia nulla.



il vettore d'onda del fotone incidente \mathbf{k} e il vettore normale alla superficie \mathbf{n} (orientato verso l'interno del calorimetro). Introduciamo un vettore di polarizzazione \mathbf{j} unitario ($|\mathbf{j}| = 1$) con due componenti: una (\mathbf{j}_\perp) perpendicolare al piano d'incidenza, chiamata polarizzazione 's', e una (\mathbf{j}_\parallel) giacente su di esso, chiamata polarizzazione 'p'. Si indichi inoltre con il pedice '1' il mezzo in cui si propaga l'onda (lo Xenon liquido) e con '2' il mezzo su cui riflette. Quindi $n_1, k_1, \epsilon_1, \mu_1$ e σ_1 sono rispettivamente l'indice di rifrazione, l'indice di assorbimento, la costante dielettrica relativa, la permeabilità magnetica relativa e la conducibilità dello Xenon, e $n_2, k_2, \epsilon_2, \mu_2$ e σ_2 quelle del quarzo, PEEK o alluminio, a seconda del caso. Gli indici n e k sono definiti dalle formule:

$$k = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \theta_t}} \right)} \quad (4.1)$$

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \theta_t}} \right)}$$

dove θ_t è l'angolo di rifrazione e ν è la frequenza dell'onda (la derivazione formale è riportata in appendice A). Utilizziamo il sistema di unità di misura di Gauss.

Dalla teoria della riflessione si ricavano (si veda l'appendice A) due formule generali per la frazione di luce riflessa ($0 \leq \bar{r} \leq 1$) a seconda della polarizzazione:

$$\bar{r}_s = \frac{\frac{n_2^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_t (\cos \theta_t - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_i)^2 + 1}{\frac{n_2^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_t (\cos \theta_t + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_i)^2 + 1} \quad (4.2)$$

$$\bar{r}_p = \frac{\frac{n_2^2}{k_2^2} (\cos \theta_i - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_t)^2 + (\cos \theta_i - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \frac{1}{\cos \theta_t})^2 + \cos^2 \theta_i (3 - \frac{2}{\cos^2 \theta_t} + \frac{k_2^2}{n_2^2 \cos^4 \theta_t})}{\frac{n_2^2}{k_2^2} (\cos \theta_i + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_t)^2 + (\cos \theta_i + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \frac{1}{\cos \theta_t})^2 + \cos^2 \theta_i (3 - \frac{2}{\cos^2 \theta_t} + \frac{k_2^2}{n_2^2 \cos^4 \theta_t})}$$

dove θ_i è l'angolo di incidenza.

Le formule sono molto complesse, ma alle frequenze in cui si propaga la luce di scintillazione nel calorimetro possono essere semplificate e approssimate, a seconda dei casi, con un'interfaccia dielettrico-dielettrico (paragrafo 4.1) e una dielettrico-conduttore (paragrafo 4.2).

Per l'implementazione nella simulazione di tali riflessioni si rimanda all'appendice B, in cui verranno trattati anche gli effetti dovuti alla rugosità delle superfici.

4.1 Interfaccia dielettrico-dielettrico

Si consideri il caso di un'interfaccia dielettrico-dielettrico, che nel caso di MEG sarà xenon-PEEK o xenon-quarzo, elencando anzitutto i valori (statici) dei parametri, in unità Gaussiane, di interesse per lo xenon:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\simeq 1.96 \text{ [50]} \\ \mu_1 &\simeq 0.9999999763 \text{ [51]} \simeq 1 \\ \sigma_1 &\simeq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

il PEEK ([52]):



$$\begin{aligned}\epsilon_2 &\simeq 3.4 \\ \mu_2 &\simeq 1 \\ \sigma_2 &\simeq 1.80 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \simeq 0 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\quad (4.4)$$

ed il quarzo:

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &\simeq 3.75 \text{ [53]} \\ \mu_2 &\simeq 1 \\ \sigma_2 &< 1.80 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1} \text{ [54]} \simeq 0 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Si può subito notare che le conducibilità sono nulle, come atteso per dei dielettrici. Dalle (4.1) si ottiene che $k_1 = k_2 = 0$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \simeq \sqrt{\epsilon_1}$ e $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \simeq \sqrt{\epsilon_2}$. Di conseguenza le (4.2) diventano:

$$\begin{aligned}\bar{r}_s &= \frac{(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t)^2}{(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)^2} \\ \bar{r}_p &= \frac{(n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t)^2}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)^2}\end{aligned}\quad (4.6)$$

che sono le ben note equazioni di Fresnel.

Un'osservazione importante riguarda gli indici di rifrazione n_1 e n_2 , perché i valori di ϵ riportati in (4.3), (4.4) e (4.5) sono relativi a campi statici, mentre in realtà $\epsilon = \epsilon(\lambda)$. Nel Montecarlo di MEG sono implementate delle formule empiriche per l'indice di rifrazione dello xenon liquido [55] e del quarzo [56] in funzione di λ , espressa in nm, dei fotoni di scintillazione:

$$n_1 = n_{Xenon} = \frac{2.82 \cdot 10^{-6}}{4.52 \cdot 10^{-5} - \frac{1}{\lambda^2}} + \frac{5.21 \cdot 10^{-4}}{4.00 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{\lambda^2}} \quad (4.7)$$

$$n_2 = n_{Quarzo} = 1.464 + e^{0.1869 - 0.01354 \lambda} \quad (4.8)$$

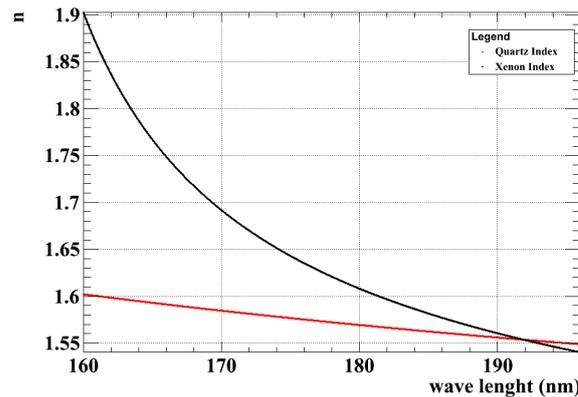


Figura 4.2: Indici di rifrazione dello Xenon liquido (in nero) e del quarzo (in rosso) in funzione della lunghezza d'onda nella regione VUV. La distribuzione in lunghezza d'onda della luce di scintillazione è centrata intorno a $\mu_\lambda = 178 \text{ nm}$ con una larghezza di $3\sigma_\lambda$ ($\sigma_\lambda = 6 \text{ nm}$).



Nella figura 4.2 sono mostrati gli andamenti di queste due formule intorno alla lunghezza d'onda di picco della scintillazione nello xenon liquido (come descritto nel paragrafo 2.3.2, la distribuzione della luce di scintillazione è di forma approssimativamente gaussiana con $\mu_\lambda = 178$ nm e $\sigma_\lambda = 6$ nm).

Per quello che riguarda l'indice di rifrazione del PEEK mancano misure accurate per poter determinare delle formule empiriche. In prima approssimazione si utilizza il valore statico $n_{PEEK} \simeq 1.844$ assunto indipendente dalla frequenza.

4.2 Interfaccia dielettrico-conduttore

Esaminiamo adesso il caso di un'interfaccia dielettrico-conduttore, che nel caso di MEG è xenon-alluminio, elencando anzitutto i valori dei parametri dell'alluminio e delle variabili necessarie per le opportune approssimazioni (sempre in unità Gaussiane)²:

$$\begin{aligned}\mu_2 &\simeq 1.000022 [57] \simeq 1 \\ \sigma_2 &\simeq 6.19 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} \\ \lambda &\simeq 178 \text{ nm} \\ \nu &= \frac{c}{\lambda} \simeq 1.68 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}\end{aligned}\tag{4.9}$$

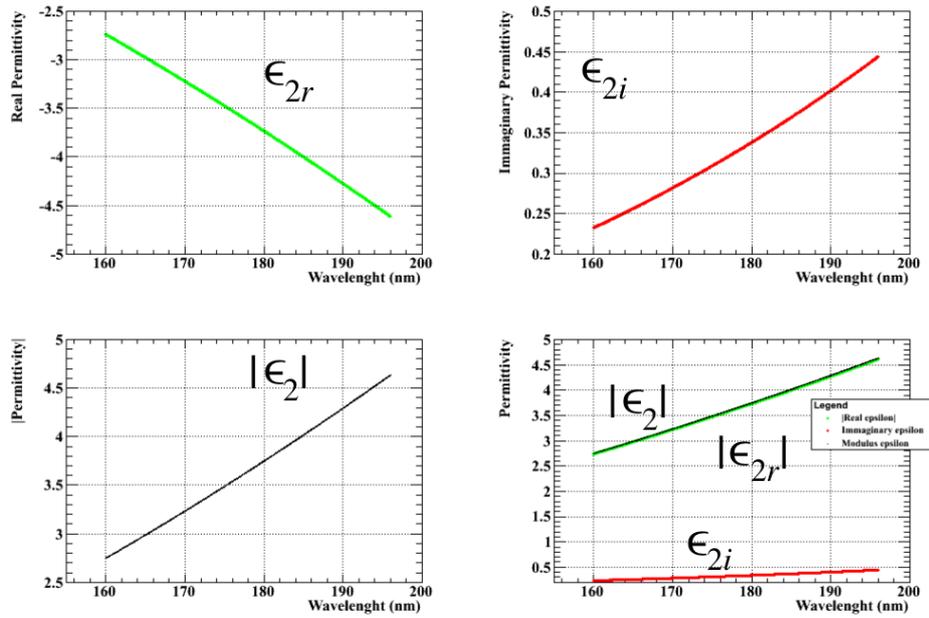


Figura 4.3: In questa figura sono mostrati gli andamenti, al variare di λ , della parte reale e immaginaria di ϵ_{Al} , e del loro valore assoluto. La quarta immagine (in basso a destra), confronta $|\epsilon_r|$, ϵ_i e $|\epsilon|$. Si osservi che al modulo contribuisce praticamente solo la parte reale.

²La conducibilità varia con la temperatura e va quindi calcolata a quella dello xenon liquido ($T \simeq -110^\circ\text{C}$), con cui l'Al è in contatto termico. Partendo dai valori riportati in [58] ($\rho_{20^\circ\text{C}} \simeq 0.0287 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$, $\alpha_{20^\circ\text{C}} \simeq 3.8 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) e usando la formula $\sigma_{-110^\circ\text{C}} = \frac{1}{\rho_{20^\circ\text{C}} [1 + \alpha_{20^\circ\text{C}} (T - 20)]}$, si ricava $\sigma_2 \simeq 68.86 \cdot 10^6 \text{ U/m}$. Per trasformarlo in unità Gaussiane, è sufficiente dividere questo risultato per $4\pi\epsilon_0$.



Nell'alluminio la costante dielettrica assume valori complessi, oltre a dipendere da λ : $\epsilon_2 = \epsilon_{2r}(\lambda) + i\epsilon_{2i}(\lambda)$. Nella figura 4.3 sono mostrati i valori della parte reale ϵ_{2r} e della parte immaginaria ϵ_{2i} nella regione delle lunghezze d'onda di scintillazione dello xenon. I grafici sono stati ottenuti con il modello matematico di Drude-Lorentz ([59]):

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= 1 - \sum_{k=0}^N \frac{f_k \omega_p^2 \left[\left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 - \Omega_k^2 \right]}{\left[\left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 - \Omega_k^2 \right]^2 + \Gamma_k^2 \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2} \\ \epsilon_i &= \sum_{k=0}^N \frac{f_k \omega_p^2 \Gamma_k \frac{2\pi c}{\lambda}}{\left[\left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2 - \Omega_k^2 \right]^2 + \Gamma_k^2 \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^2} \\ |\epsilon| &= \sqrt{\epsilon_r^2 + \epsilon_i^2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

In questa formula ω_p è la frequenza di plasma e f_k , Γ_k e Ω_k sono rispettivamente la forza, la frequenza di smorzamento e la frequenza di risonanza del k-esimo oscillatore³. Per una più rigorosa trattazione si rimanda ad altri testi [60, 61, 62].

Applicando questo modello alla lunghezza d'onda di picco dello xenon (178 nm) si ottiene:

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &\simeq -3.62893 + i0.326169 \simeq -3.63 + i0.33 \\ |\epsilon_2| &\simeq 3.64356 \simeq 3.64\end{aligned}\quad (4.11)$$

Per ricavare le formule approssimate valide per l'Al partiamo dai valori (4.3) e (4.9) ponendo innanzitutto $\mu_1 = \mu_2 = 1$ come nel caso dielettrico-dielettrico. Calcoliamo preliminarmente il termine $\frac{4\sigma_2^2}{\epsilon_2^2 \nu^2}$ presente in (4.1)⁴:

$$\frac{4\sigma_2^2}{|\epsilon_2|^2 \nu^2} \simeq \left(\frac{2 \cdot 6.19 \cdot 10^{17}}{3.64 \cdot 1.68 \cdot 10^{15}} \right)^2 \simeq 4.10 \cdot 10^4 \gg 1 \quad (4.12)$$

La (4.1) può essere quindi approssimata con l'espressione:

$$n_2^2 = \frac{|\epsilon_2| \mu_2}{2} \frac{2\sigma_2}{|\epsilon_2| \nu} \left[\left(\frac{2\sigma_2}{|\epsilon_2| \nu} \right)^{-1} + \sqrt{\left(\frac{4\sigma_2^2}{|\epsilon_2|^2 \nu^2} \right)^{-1} + \frac{1}{\cos^2 \theta_t}} \right] \simeq \frac{\sigma_2}{\nu} \frac{1}{\cos \theta_t} \quad (4.13)$$

e quindi il rapporto degli indici di rifrazione (che sarà indicato con u) vale:

$$u = \frac{n_1}{n_2} \simeq \sqrt{\frac{\epsilon_1 \nu}{\sigma_2} \cos \theta_t} \lesssim 7.32 \cdot 10^{-2} \quad (4.14)$$

dove abbiamo sostituito il valore statico di ϵ_1 riportato nella (4.3). La (4.14) ha come importante conseguenza che si può porre $\cos \theta_t \simeq 1$: infatti, a partire dalla legge di Snell (A.26), il precedente risultato suggerisce che:

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} \lesssim 7.32 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \sin \theta_t \lesssim 7.32 \cdot 10^{-2} \sin \theta_i \Rightarrow 0^\circ \leq \theta_t \lesssim 4.19^\circ \Rightarrow \cos \theta_t \gtrsim 0.997$$

³Nel caso dell'alluminio, $\omega_p = 14.98 \frac{e}{\hbar}$ e gli oscillatori sono 5 ($N = 5$): $f = (0.523 \ 0.227 \ 0.050 \ 0.166 \ 0.030)$, $\Gamma = (0.047 \ 0.333 \ 0.312 \ 1.351 \ 3.382) \frac{e}{\hbar}$ e $\Omega = (0.000 \ 0.162 \ 1.544 \ 1.808 \ 3.473) \frac{e}{\hbar}$. I coefficienti f_k sono adimensionali, mentre i valori di ω_p , Γ_k e Ω_k sono espressi in eV e quindi moltiplicandoli per $\frac{e}{\hbar}$, sono misurati in rad/s. Valori tratti da [59].

⁴In questo caso, essendo ϵ_2 complesso, dobbiamo sostituire ϵ_2^2 con $|\epsilon_2|^2$.



L'approssimazione è quindi corretta entro il 3‰. Sviluppando in maniera analoga k_2 otteniamo:

$$k_2^2 = \frac{|\epsilon_2| \mu_2}{2} \frac{2\sigma_2}{|\epsilon_2| \nu} \left[- \left(\frac{2\sigma_2}{|\epsilon_2| \nu} \right)^{-1} + \sqrt{\left(\frac{4\sigma_2^2}{|\epsilon_2|^2 \nu^2} \right)^{-1} + \frac{1}{\cos^2 \theta_t}} \right] \simeq \frac{\sigma_2}{\nu} \frac{1}{\cos \theta_t} \simeq n_2^2 \quad (4.15)$$

Quindi, ponendo $k_2 \simeq n_2$, le (4.2) diventano:

$$\begin{aligned} \bar{r}_s &\simeq \frac{1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i\right)^2} = \frac{2 - 2u \cos \theta_i + u^2 \cos^2 \theta_i}{2 + 2u \cos \theta_i + u^2 \cos^2 \theta_i} \\ \bar{r}_p &\simeq \frac{\cos^2 \theta_i + \left(\cos \theta_i - \frac{n_1}{n_2}\right)^2}{\cos^2 \theta_i + \left(\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2}\right)^2} = \frac{2 \cos^2 \theta_i - 2u \cos \theta_i + u^2}{2 \cos^2 \theta_i + 2u \cos \theta_i + u^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si osservi come queste due equazioni dipendano dal rapporto degli indici di rifrazione ($u = \frac{n_1}{n_2} < 1$) e dal coseno dell'angolo d'incidenza ($0 < \cos \theta_i < 1$).

Per valutare la bontà delle approssimazioni utilizzate è possibile stimare l'errore relativo (δ_r) commesso sulle grandezze in gioco:

$$\begin{aligned} \mu_1 \simeq 1 &\Rightarrow \delta_r \sim 10^{-9} \\ \mu_2 \simeq 1 &\Rightarrow \delta_r \sim 10^{-5} \\ n_2^2 \simeq \frac{\sigma_2}{\nu} \frac{1}{\cos \theta_t} &\Rightarrow \delta_r \sim 10^{-3} \\ \cos \theta_t \simeq 1 &\Rightarrow \delta_r \sim 10^{-3} \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'errore commesso è quindi dell'ordine di qualche parte su mille.

Come ricordato nel paragrafo precedente, la distribuzione in lunghezza d'onda della luce di scintillazione non è monocromatica a 178 nm, ma ha una forma approssimativamente gaussiana con media $\mu_\lambda = 178$ nm e deviazione standard $\sigma_\lambda = 6$ nm. Poiché ϵ_2 (costante dielettrica dell'alluminio) e n_1 (indice di rifrazione dello xenon) sono funzioni di λ , varieranno anch'essi in un intervallo. Nella figura 4.3 sono riportate le curve calcolate nella regione $[\mu_\lambda - 3\sigma_\lambda, \mu_\lambda + 3\sigma_\lambda]$ e si può osservare che $|\epsilon_2|$ non varia molto. La stessa cosa vale per n_1 , come mostrato nella figura 4.2, per cui le approssimazioni (4.12-4.14) sono ragionevolmente valide.

Si possono quindi esprimere le riflettività per i due stati di polarizzazione (4.16) in funzione di λ (espressa in nm), $\cos \theta_i$ e n_1 , tutte grandezze o parametri sotto controllo nel Montecarlo:

$$\begin{aligned} \bar{r}_s &\simeq \frac{1 + \left(1 - \frac{0.676 n_1}{\sqrt{\lambda}} \cos \theta_i\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{0.676 n_1}{\sqrt{\lambda}} \cos \theta_i\right)^2} \\ \bar{r}_p &\simeq \frac{\cos^2 \theta_i + \left(\cos \theta_i - \frac{0.676 n_1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2}{\cos^2 \theta_i + \left(\cos \theta_i + \frac{0.676 n_1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

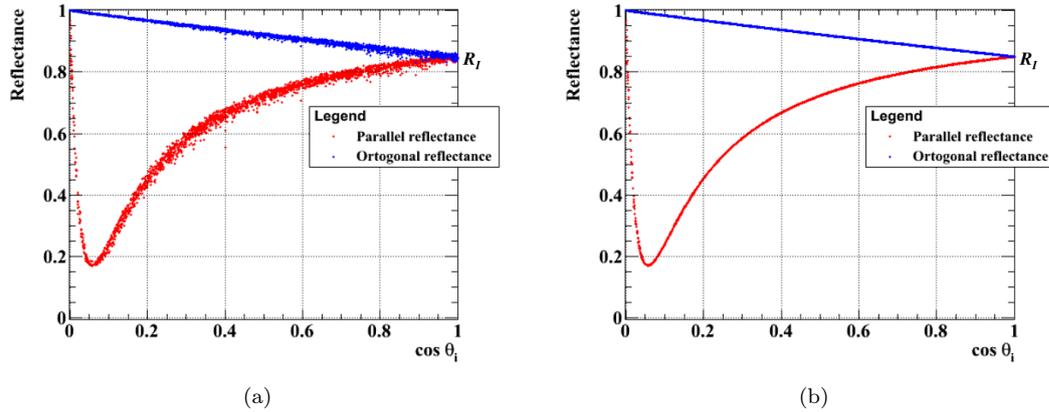


Figura 4.4: Andamento di \bar{r}_s (in blu) e \bar{r}_p (in rosso) in funzione di $\cos \theta_i$. In (a) le \bar{r}_s e \bar{r}_p sono calcolate con le (4.18) in cui è presente una dispersione dovuta alla distribuzione della λ . In (b) la u è parametrizzata usando la (4.19) con R_I fissato a 0.85.

Graficando \bar{r}_s e \bar{r}_p in base alla 4.18 si ottengono le curve mostrate in figura 4.4(a) (\bar{r}_s in blu e \bar{r}_p in rosso) in funzione del coseno dell'angolo di incidenza ($\cos \theta_i$), allargate dalla dispersione dovuta alla distribuzione della lunghezza d'onda della luce di scintillazione. Si nota subito che entrambe le distribuzioni di riflettività convergono per angoli radenti (90° , cioè $\cos \theta_i = 0$) e per angoli ad incidenza normale (0° , cioè $\cos \theta_i = 1$). Nel primo caso la riflettività converge a 1 dal momento che non c'è diffusione, mentre nel secondo converge ad un parametro R_I chiaramente collegato a u . Inoltre, poiché le dispersioni di \bar{r}_s e \bar{r}_p sono piccole ($\lesssim 2\%$), si può in prima approssimazione considerare R_I indipendente dalla lunghezza d'onda ed approssimare le curve in figura 4.4(a) con il valore centrale, come mostrato in figura 4.4(b).

Il valore per R_I ottenuto (0.85) non è però in accordo con le misure sperimentali ([49]), il che indica la necessità di correggere alcune approssimazioni. Si è scelto allora di utilizzare R_I come parametro libero del Montecarlo, dato che può essere ottenuto da misure sperimentali.

Nota la riflettività per un'onda ad incidenza normale R_I , il parametro u si ricava risolvendo una delle (4.16) ponendo $\cos \theta_i = 1$:

$$R_I = \frac{2 - 2u + u^2}{2 + 2u + u^2} \Rightarrow u = \frac{1 + R_I \pm \sqrt{6R_I - 1 - R_I^2}}{1 - R_I}$$

Imponendo la positività del radicando e del denominatore si ottiene: $3 - \sqrt{8} \leq R_I < 1$. L'ambiguità della soluzione è risolta in base alla considerazione $u < 1$, che seleziona automaticamente il segno '-'. In pratica, per restare nei limiti dell'approssimazione 4.14, non si devono considerare valori $R_I < 0.5$. Ricapitolando, nel Montecarlo il rapporto u è calcolato tramite la formula:

$$u = \frac{1 + R_I - \sqrt{6R_I - 1 - R_I^2}}{1 - R_I} \quad (0.5 < R_I < 1) \quad (4.19)$$

in cui R_I è un parametro in ingresso.



Capitolo 5

Analisi dei dati tramite l'utilizzo della riflessione con luce polarizzata

5.1 Confronto dei dati con le simulazioni MC

Dopo aver introdotto la *riflessione polarizzata* nella simulazione del calorimetro¹, si confrontano nuovamente le distribuzioni di carica (corrette per guadagno ed efficienze quantiche) sulle varie facce con i dati reali della calibrazione di π^0 . Il risultato è mostrato in figura 5.1. I parametri usati nel Montecarlo di questo confronto sono:

1. lunghezza di scattering Rayleigh: $\lambda_{Ray} = 55$ cm (a 178 nm);
2. lunghezza di assorbimento: $\lambda_{Abs} = 400$ cm;
3. $R_I = 63\%$ (capitolo 4) con una rugosità dell'alluminio del 30% (appendice B);
4. rilascio di energia necessario per l'emissione di un fotone di scintillazione pari a 22.1 eV.

Rispetto alla figura 3.5 a pagina 59 si può osservare un netto miglioramento, sia visivo che quantitativo espresso dal χ^2/NDF . Il più evidente è dato dalla faccia *Bottom* ($\chi^2/NDF \simeq 3.1$ rispetto a $\chi^2/NDF \simeq 102.2$), ma anche per le facce *Up*, *Down* e *Top* il χ^2/NDF è migliorato, rispettivamente da 3.7 a 2.3, da 3.9 a 1.7 e da 8.6 a 2.4. Le facce *Inner* e *Outer*, visivamente, sembrano migliorare sotto alcuni punti di vista e peggiorare sotto altri, ma i χ^2/NDF indicano un miglioramento complessivo (rispettivamente 6.3 e 4.6 a differenza dei precedenti 10.8 e 19.4).

Si noti che per migliorare il confronto con i dati è stato necessario anche modificare leggermente l'energia necessaria per emettere un fotone di scintillazione: il valore misurato è infatti 21.7 ± 2.4 eV, come mostrato in tabella 2.2 a pagina 41; quello scelto è comunque pienamente compatibile con la misura entro l'errore.

I valori dei parametri usati, stavolta, sono molto più compatibili con quelli misurati per lo xenon liquido, rispetto a quelli utilizzati per ottenere la figura 3.5 (si veda il paragrafo 3.2.3).

La figura 5.1 è stata ottenuta utilizzando le efficienze quantiche estratte confrontando i dati reali con un Montecarlo privo di riflessioni polarizzate. L'estrazione di un nuovo set di efficienze quantiche con gli effetti delle polarizzazioni e la loro applicazione ai dati è il passo successivo.

¹Per i dettagli delle modifiche alla simulazione MC si veda l'appendice B.

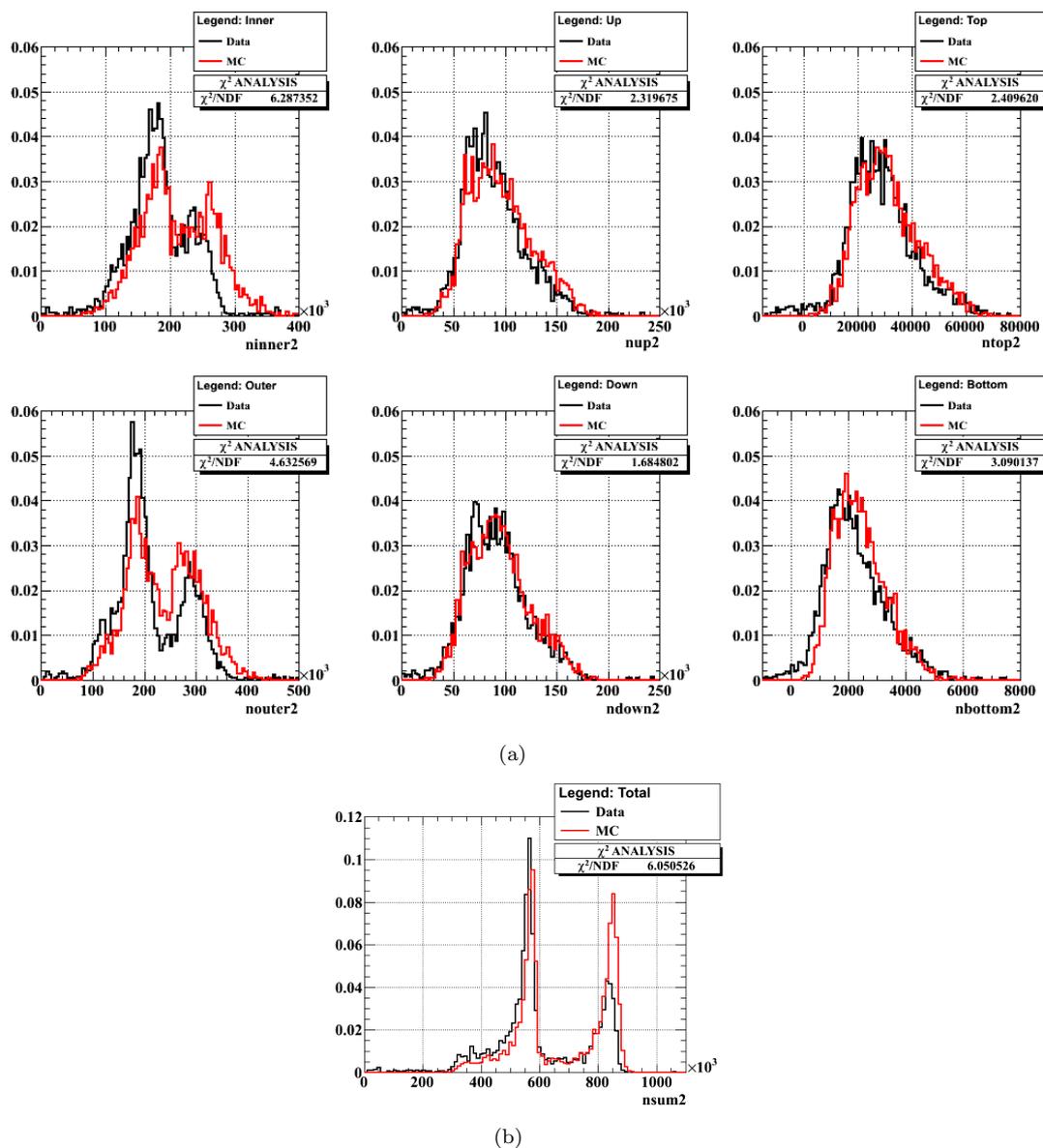


Figura 5.1: Distribuzioni delle cariche corrette per guadagno e QE per i dati (in nero) e per gli eventi Montecarlo (in rosso) tenendo conto della *riflessione polarizzata*. In (a) il confronto faccia per faccia (per colonne dall'alto in basso, da sinistra a destra: Inner, Outer, Up, Down, Top, Bottom), in (b) la distribuzione in carica totale. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi. L'accordo è notevolmente migliorato rispetto alla figura 3.5, anche se le facce Inner e Outer mostrano qualche discordanza.

5.2 Nuova valutazione delle efficienze quantiche e confronto con le vecchie

Le efficienze quantiche dei PMT del calorimetro sono ricavate confrontando il numero di fotolettroni per fototubo ottenuto attraverso simulazioni Montecarlo con il numero misurato in eventi



indotti da sorgenti α , come illustrato nel paragrafo 2.3.3 a pagina 42. Dal fit lineare del confronto dati contro MC (figura 5.2) si estrae la pendenza della retta che fornisce la QE del fototubo in esame.

Questa procedura viene generalmente eseguita utilizzando eventi misurati in Xenon gassoso (GXe) perchè la simulazione è più semplice, in quanto la lunghezza di assorbimento e la lunghezza di diffusione Rayleigh sono molto grandi ($\approx \infty$) e l'indice di rifrazione è $n_{GXe} \simeq 1$.

Le QE dipendono però dalla temperatura del fotocatodo e le misure in gas vengono eseguite ad una temperatura di $\approx 30^\circ\text{C}$ più elevata di quella a cui opera lo Xenon liquido. Inoltre i dati in Xenon gassoso possono essere raccolti solo una volta all'anno, prima della liquefazione. Sarebbe quindi preferibile in linea di principio utilizzare i dati in Xenon liquido, che possono essere raccolti durante la normale acquisizione dati e consentono di estrarre le QE in condizioni reali di lavoro. Tuttavia l'estrazione delle QE in LXe presenta maggiori difficoltà a causa della complessità della propagazione di luce di scintillazione nel liquido stesso, che dipende da numerosi parametri ottici (λ_{Ray} , indici di rifrazione, coefficienti di riflettività, etc.), funzioni della lunghezza d'onda della luce di scintillazione.

Applicando la procedura di confronto dati-simulazione in liquido, non si ottengono buoni risultati per il fit lineare, come mostrato nella figura 5.2 in cui sono mostrati i grafici dati contro MC per otto fototubi della faccia *Up*. Si nota infatti una grossa dispersione dei punti (ogni punto rappresenta una sorgente) intorno alla retta di *best fit*, ben superiore a quanto atteso da normali fluttuazioni statistiche.

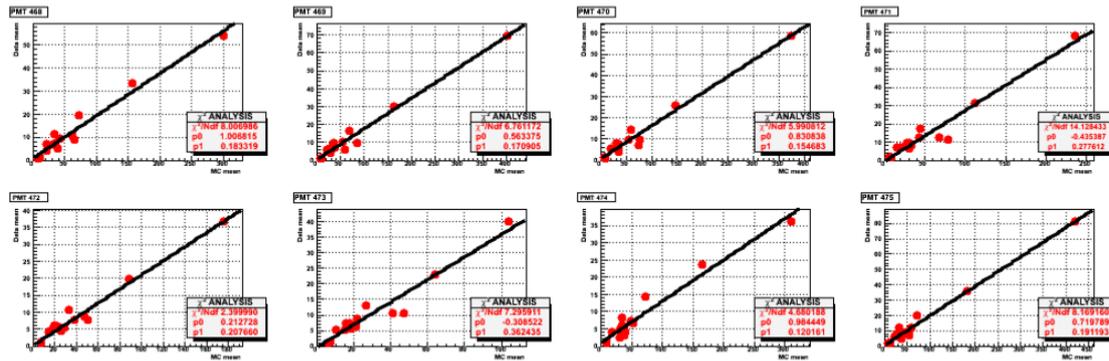


Figura 5.2: Fit per l'estrazione delle QE di alcuni fototubi della faccia *Up* ottenuti partendo da un Montecarlo senza la riflessione polarizzata.

Ripetendo la procedura in liquido, ma utilizzando il Montecarlo con implementate le riflessioni polarizzate, la qualità dei fit per gli stessi PMT migliora, come mostrato nella figura 5.3.

Si può peraltro osservare che esistono due punti particolarmente distanti dalla retta, cerchiati in rosso nella figura, nel primo e nel settimo riquadro ed entrambi relativi alla stessa sorgente.

Un'analisi dettagliata mostra che l'origine degli eventi fuori retta è di natura geometrica. Si osservi infatti la figura 5.4: i punti lontani dalla retta di *best fit* sono dovuti ad un angolo di incidenza, rispetto alla normale al PMT, prossimo a 90° della luce proveniente da una determinata sorgente.

5.2.1 Confronto dati-MC con le nuove efficienze quantiche

Applicando ai dati di π^0 il nuovo set di QE estratte in liquido con la procedura appena descritta, si ottiene la figura 5.5, da confrontare con la 5.1.

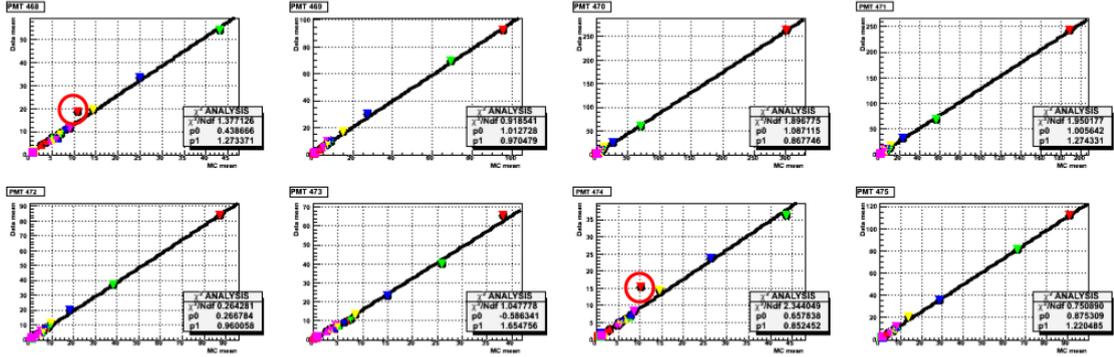


Figura 5.3: Fit per l'estrazione delle QE per gli stessi PMT della faccia *Up* mostrati nella figura 5.2 ed ottenuti partendo da un Montecarlo con la riflessione polarizzata. I cerchi in rosso evidenziano due punti fuori dal fit.

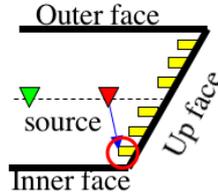


Figura 5.4: Lo schema della configurazione geometrica PMT-sorgente per i punti cerchiati in rosso nella figura 5.3.

Il Montecarlo utilizzato è lo stesso descritto nel paragrafo 5.1. L'accordo faccia per faccia stavolta è ottimo non solo visivamente, ma anche confrontando i χ^2/NDF : per *Inner*, *Outer*, *Up*, *Down* e *Top*, si ottengono rispettivamente 1.9, 2.1, 1.5, 1.1 e 1.2 contro 6.3, 4.6, 2.3, 1.7 e 2.4 mostrati in figura 5.1 a pagina 72. Fa eccezione la faccia *Bottom* che peggiora nuovamente: $\chi^2 \simeq 6.6$ contro un precedente 3.1, nella figura 5.1.

Per migliorare l'accordo per la faccia *Bottom*, abbiamo provato a modificare l'indice di rifrazione del PEEK dal valore statico 1.8 a 2.1 e la lunghezza Rayleigh a 178 nm da 55 cm a 50 cm. Il risultato finale² è mostrato in figura 5.6, ed è stato ottenuto con i seguenti valori dei parametri:

1. lunghezza di scattering Rayleigh di 50 cm (a 178 nm);
2. lunghezza di assorbimento di 400 cm;
3. $R_I = 63\%$ con una rugosità sull'alluminio del 30%;
4. energia necessaria per produrre per un fotone di scintillazione pari a 22.2 eV;
5. $n_{PEEK} = 2.1$.

valori ragionevolmente compatibili con quelli misurati per lo Xenon liquido, l'alluminio e il PEEK: $\lambda_{Att} = \frac{\lambda_{Ray}\lambda_{Abs}}{\lambda_{Ray} + \lambda_{Abs}} \simeq 44.4$ cm contro un valore misurato $\lambda_{Att}^{Measured} \simeq (40 \pm 2.5)$ cm, energia necessaria per produrre un fotone di scintillazione entro l'errore del valore misurato (21.7 ± 2.4) ,

²Una volta generato il Montecarlo, sono state estratte le nuove QE che sono poi state applicate ai dati reali per un confronto più accurato.

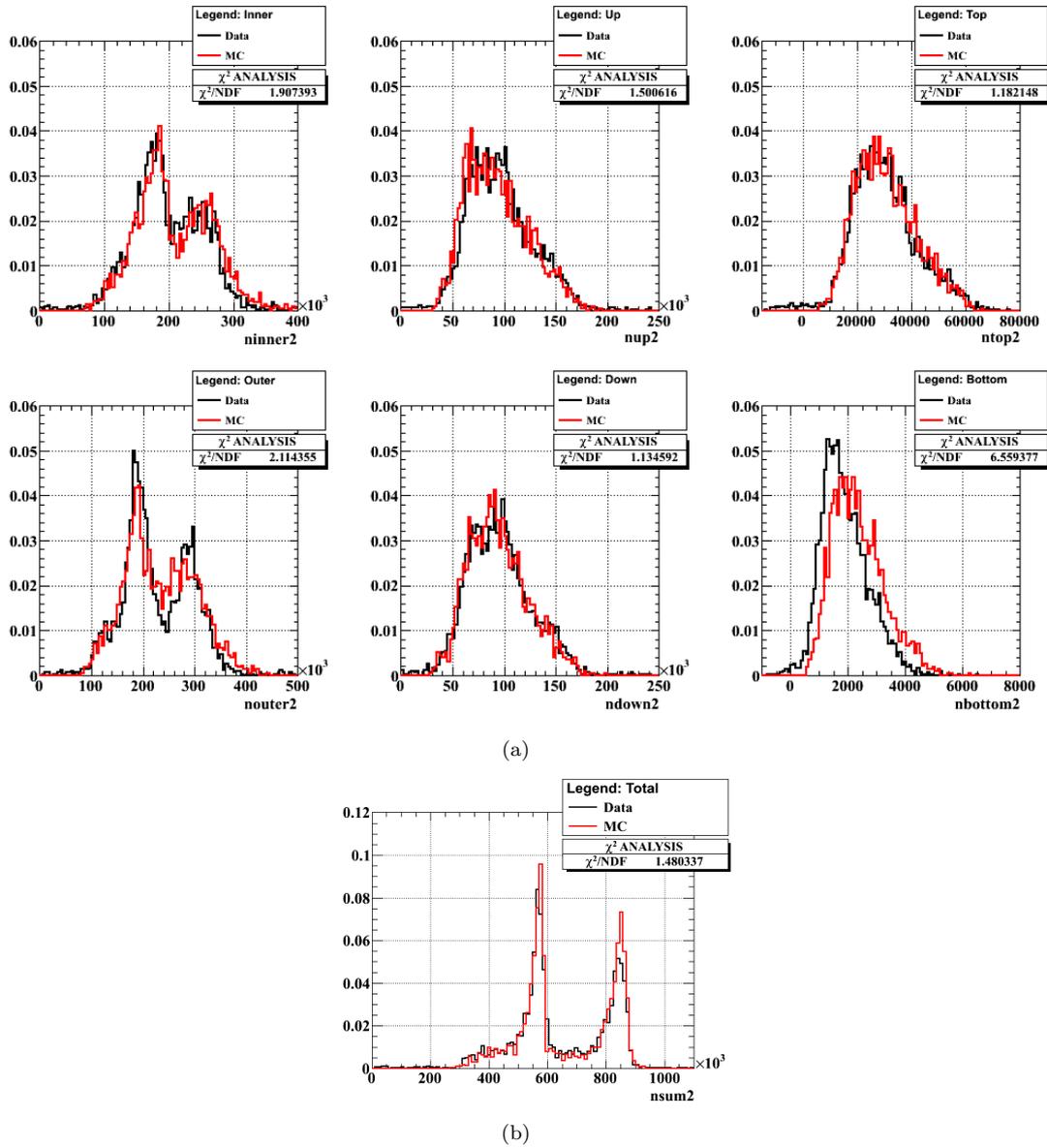


Figura 5.5: Distribuzioni delle cariche corrette per guadagno e nuovo set di QE per i dati (in nero) e per gli eventi Montecarlo (in rosso) tenendo conto della riflessione polarizzata. In (a) il confronto faccia per faccia (per colonne dall'alto in basso, da sinistra a destra: Inner, Outer, Up, Down, Top, Bottom), in (b) la distribuzione in carica totale. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi. Tutte le facce migliorano rispetto alla figura 5.1, tranne la Bottom che peggiora.

R_I entro il 60 ÷ 80% mostrato in [49] e un indice di rifrazione del PEEK vicino ai valori in [63] ($n_{PEEK} = 2.15$).

La faccia *Bottom* è nuovamente migliorata ($\chi^2 \simeq 3.6$ contro 6.6 della figura 5.5), ma risulta ancora leggermente peggiore se confrontata con la figura 5.1. Le altre facce sono leggermente

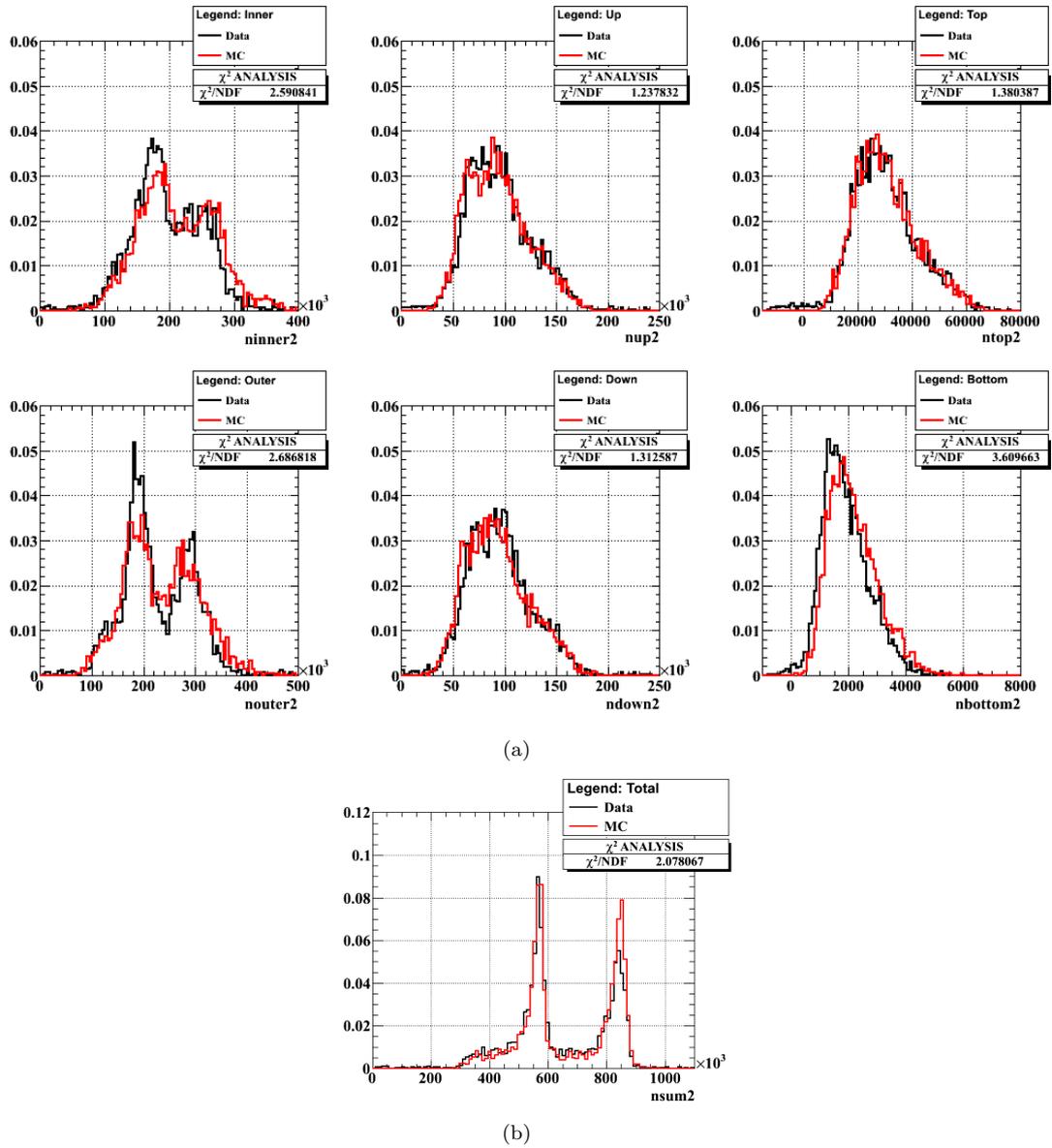


Figura 5.6: Distribuzioni delle cariche, corrette per guadagno e nuovo set di QE, dei dati (in nero) e del monte-carlo (in rosso) con $n_{PEEK} = 2.1$. In (a) il confronto faccia per faccia (per colonne dall'alto in basso, da sinistra a destra: Inner, Outer, Up, Down, Top, Bottom), in (b) la distribuzione in carica totale. I grafici sono normalizzati allo stesso numero di eventi. Rispetto alla figura 5.5, la faccia Bottom migliora, ma peggiorano leggermente Inner e Outer.

peggiorate ma sono comunque migliori di quelle in figura 5.1: per *Inner*, *Outer*, *Up*, *Down* e *Top*, si ottengono valori di χ^2/NDF rispettivamente 2.6, 2.7, 1.2, 1.3 e 1.4 contro 1.9, 2.1, 1.5, 1.1 e 1.2 della figura 5.5 nella pagina precedente. Per quanto riguarda la n_{SUM} (figura 5.6(b)), l'accordo rimane molto buono anche se lievemente peggiore che nella figura 5.5(b) ($\chi^2/NDF = 2.1$ invece

di 1.5).

Il risultato mostrato in quest'ultima figura rappresenta dunque un buon compromesso ed è immediato concludere che la conoscenza dell'indice di rifrazione del PEEK ha una certa rilevanza.

5.3 Risultati del LF

Occorre infine valutare i benefici prodotti nell'applicazione del *Linear Fit* sui fotoni da 55 MeV della calibrazione CEX (π^0) dall'introduzione della riflessione polarizzata. Utilizzando per il *training* del LF la simulazione con cui è stata ottenuta la figura 5.6 a fronte e applicando i coefficienti ai dati corretti con le QE estratte partendo da un Montecarlo coerente, si ottengono le distribuzioni mostrate in figura 5.7. I tagli usati per la determinazione delle risoluzioni sono

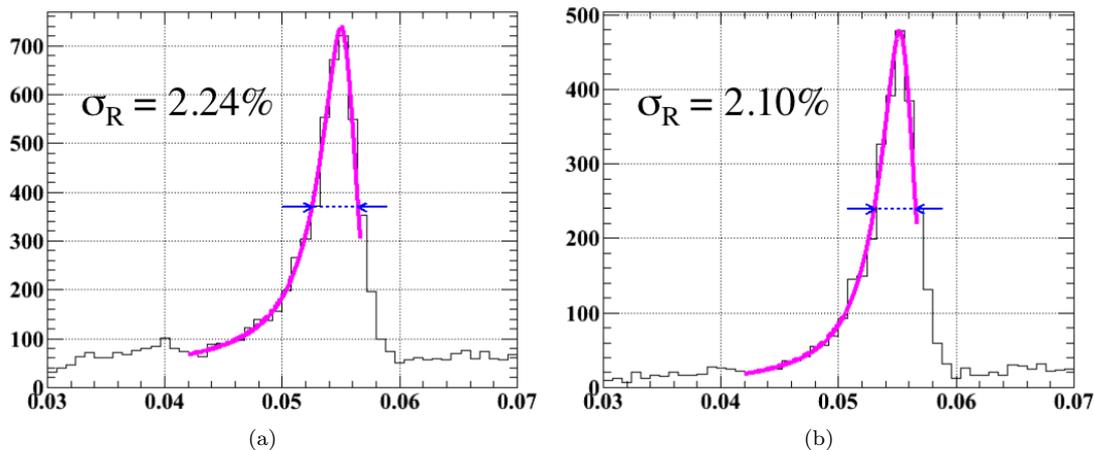


Figura 5.7: Ricostruzione tramite LF dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX con sovrapposta un'interpolazione fenomenologica (linea magenta). Il *training* del LF è basato sul MC con cui è stata ottenuta la figura 5.6. In (a) sono considerati tutti gli eventi, in (b) sono esclusi gli eventi ricostruiti entro 2 cm dal bordo della faccia interna ($w < 2$ cm).

gli stessi del paragrafo 3.2.1.

Nella figura 5.7(a) non è stato considerato il taglio in profondità, ottenendo una $\sigma_R \simeq 2.24\%$, lievemente peggiore dello XET ($\sigma_R \simeq 2.13$). Questo risultato però è nettamente migliore del LF ottenuto con un *training* basato sul Montecarlo senza riflessione polarizzata ($\sigma_R \simeq 3.08\%$), figura 3.3(b) a pagina 57.

Nella figura 5.7(b) è stato incluso il taglio in profondità e si osserva che la risoluzione ottenuta con il LF dipende poco da questo taglio: si passa infatti da $\sigma_R \simeq 2.24\%$ a $\sigma_R \simeq 2.10\%$, mentre per lo XET si passa da $\sigma_R \simeq 2.13\%$ a $\sigma_R \simeq 1.85\%$. Ricordiamo che il LF è a priori meno dipendente dalla selezione in profondità perché calcola i coefficienti tenendo conto esplicitamente anche degli eventi poco profondi.

5.4 Possibili nuovi miglioramenti per la comprensione del calorimetro

Dal confronto fra i risultati del *Linear Fit* riportati nel paragrafo precedente in figura 5.7 ed il limite teorico mostrato in figura 3.4 a pagina 58, risulta che l'algoritmo LF necessita ancora di una



procedura di ottimizzazione. Il motivo è chiaramente che, nonostante il notevole miglioramento ottenuto con l'applicazione della riflessione polarizzata, esistono ancora delle discrepanze fra dati e MC che richiedono ulteriori approfondimenti.

La ricerca dell'accordo faccia per faccia tra dati reali e simulazione MC ha messo in luce il problema dell'indice di rifrazione del PEEK. Modificando tale parametro si osservano miglioramenti per alcune facce, ma peggioramenti per altre (figure 5.5 a pagina 75 e 5.6 a pagina 76). Questo suggerisce che potrebbe essere necessario avere informazioni più dettagliate del valore di n_{PEEK} per campi non statici.

I fit utilizzati per estrarre le QE hanno evidenziato la presenza di un elemento comune alle sorgenti per cui i dati si discostano notevolmente dall'andamento lineare: grandi angoli d'incidenza rispetto alla normale (figura 5.3 a pagina 74) della luce di scintillazione sulla finestra di quarzo dei PMT. I motivi di tale discrepanza potrebbero essere legati ad esempio alla formula empirica (4.8) a pagina 65 (da riesaminare criticamente) oppure allo spessore di fotocatodo attraversato dal fotone.

Ulteriori approfondimenti sono attualmente in corso.

Capitolo 6

Analisi della presa dati del 2009

La collaborazione MEG ha completato l'analisi preliminare dei dati ottenuti nel 2009. In una prima fase gli eventi che cadono in una regione del piano $(E_\gamma, \Delta t_{e\gamma})$ intorno ai valori previsti per il segnale ($E_\gamma \simeq 53$ MeV, $\Delta t_{e\gamma} \simeq 0$ ns), denominata *Blinding-Box* (B-B), vengono salvati in files separati e "nascosti", in modo da fissare i criteri di analisi senza conoscere le distribuzioni nella zona di interesse (*blind analysis*). Nella figura 6.1 è mostrato il piano $(E_\gamma, \Delta t_{e\gamma})$: il riquadro rosso è la B-B, mentre i riquadri tratteggiati esterni alla B-B sono le *sideband* fuori tempo (destra e sinistra: $|\Delta t_{e\gamma}| > 0.7$ ns) e fuori energia (in basso: $E_\gamma < 48$ MeV).

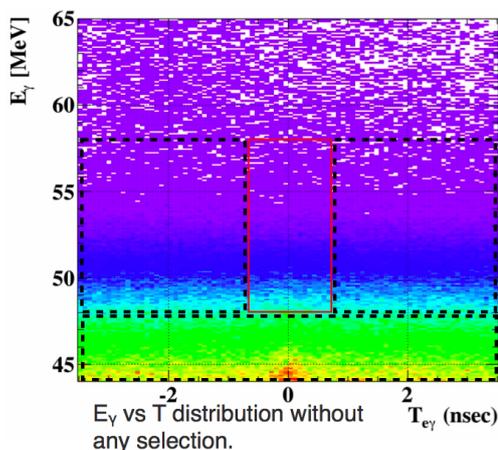


Figura 6.1: Definizione della *Blinding Box* e delle *sideband* dei dati dell'esperimento MEG.

Studiando gli eventi nelle *sideband* si possono determinare le distribuzioni di probabilità (PDF) nelle variabili cinematiche $(E_e, E_\gamma, \Theta_{e\gamma}, \Delta t_{e\gamma})$ del fondo scorrelato. La tecnica di estrazione delle PDF del segnale e del RMD è illustrata nel paragrafo 6.1. Una volta definiti gli strumenti di analisi e valutato il fondo accidentale (paragrafo 6.2), si apre la B-B e si effettua un'analisi di *Likelihood* dei dati contenuti all'interno di essa (paragrafo 6.3).



6.1 L'analisi di *Likelihood* nell'esperimento MEG

L'analisi di *Likelihood* studia il livello di somiglianza tra la distribuzione sperimentale degli eventi e quelle attese teoricamente per il segnale ed il fondo, utilizzando tutta l'informazione sperimentale disponibile.

Dato un set di parametri $\vec{\theta}$ e un set di valori \vec{x} , viene definita la *Probability Distribution Function* $P(\vec{x}|\vec{\theta})$ come la funzione che esprime la probabilità di ottenere i valori \vec{x} come risultato di una misura partendo da una distribuzione definita dai parametri $\vec{\theta}$. Le PDF sono dunque funzioni delle misure \vec{x} , parametrizzate dal set $\vec{\theta}$.

Definiamo il set $\vec{\theta}$ dei parametri da estrarre come: $\theta_1 = N_{sig}$ il numero di eventi di segnale, $\theta_2 = N_{RMD}$ il numero di eventi di decadimento radiativo e $\theta_3 = N_{BG} = N - N_{sig} - N_{RMD}$ il numero di eventi accidentali (N è il numero totale di eventi). Le variabili rilevanti per l'identificazione degli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$ sono $\{E_p (= x_1), E_\gamma (= x_2), \delta\Theta_{e\gamma} (= x_3), \delta t_{e\gamma} (= x_4)\}$ che verranno indicate genericamente per l'evento j -esimo come x_{ij} . Si indichino inoltre con $S(x_{ij})$, $R(x_{ij})$ e $B(x_{ij})$ le PDF rispettivamente del segnale, del decadimento radiativo e degli eventi accidentali. La funzione di Likelihood per l'esperimento MEG è data da:

$$L(\vec{\theta}|\vec{x}_i) = \frac{N^{N_{obs}} e^{-N}}{N_{obs}!} \prod_{j=1}^{N_{obs}} \left[\frac{N_{sig}}{N} S(x_{ij}) + \frac{N_{RMD}}{N} R(x_{ij}) + \frac{N_{BG}}{N} B(x_{ij}) \right] \quad (6.1)$$

dove N_{obs} è il numero totale di eventi osservati nelle finestre di ricerca del segnale. Massimizzando la 6.1 si ricavano i valori migliori (*best value*) dei parametri $\vec{\theta}$, cioè il numero di eventi di segnale, RMD e fondo accidentale.

In base al metodo (standard per la fisica delle alte energie) di Feldman & Cousins si determina inoltre l'intervallo dei valori di tali parametri al 90% di livello di confidenza (CL).

6.1.1 Il metodo statistico di *Feldman & Cousins*

Dato un set di parametri $\vec{\theta}$, si costruisce per i dati sperimentali \vec{x} il rapporto:

$$R_{exp}(\theta) = \frac{L(\vec{\theta}|\vec{x})}{L_{MAX}(\vec{\hat{\theta}}|\vec{x})} \quad (6.2)$$

della *Likelihood* $L(\vec{\theta}|\vec{x})$ rispetto al massimo valore che può assumere al variare di $\vec{\theta}$. I *best value* $\vec{\hat{\theta}}$ sono i valori dei parametri per cui l'estimatore $L(\vec{\theta}|\vec{x})$ è massimo.

Successivamente si fissa $\vec{\theta}$ ad un certo set $\vec{\theta}_F$ e si generano, partendo dalle PDF, M repliche dei dati dell'esperimento reale (*Toy Montecarlo*). Per ciascuno di essi si calcola il valore R secondo la 6.2 ottenendo la distribuzione $\frac{dM}{dR} \Big|_{\vec{\theta}=\vec{\theta}_F}$ dei valori di R corrispondenti al set $\vec{\theta}_F$. $\vec{\theta}_F$ è contenuto nell'intervallo al 90% di livello di confidenza se

$$\frac{1}{M} \int_{R \leq R_{exp}(\vec{\theta}_F)} \frac{dM}{dR} \Big|_{\vec{\theta}_F} dR \geq 10\% \quad (6.3)$$

6.1.2 Determinazione delle funzioni di distribuzione di probabilità (PDF)

Per il calcolo della *Likelihood* è necessaria la conoscenza delle PDF del segnale e dei fondi.

Per il segnale si usano le misure di calibrazione (π^0 per E_γ , Michel per E_e e RMD per la differenza temporale) integrate con simulazioni Montecarlo basate sulle risoluzioni sperimentali.



Per il decadimento radiativo le PDF sono ottenute partendo dalla distribuzione teorica 3-D in E_γ , E_e e $\Theta_{e\gamma}$, convoluta con le risoluzioni sperimentali per queste tre variabili. Infatti non è possibile isolare un campione di eventi RMD su cui misurare direttamente le PDF senza contaminazioni di fondo accidentale; inoltre i vincoli cinematici introducono una correlazione fra le energie del fotone e del positrone e l'angolo relativo, per cui la PDF tridimensionale non può essere fattorizzata in tre PDF unidimensionali indipendenti.

Le PDF del fondo accidentale sono misurate nelle *sideband* a $|\Delta t_{e\gamma}| > 0.7$ ns. In tabella 6.1 è mostrato uno schema riassuntivo dei metodi di determinazione delle PDF.

Tipo	PDF determinate con
segnale	calibrazioni + Montecarlo
radiativo	calcoli teorici + risoluzioni sperimentali
fondo accidentale	<i>sideband</i>

Tabella 6.1: Tabella riassuntiva dei metodi di determinazione delle PDF.

6.2 Sensibilità dell'esperimento

La distribuzione degli eventi in due *sideband* a $|\Delta t_{e\gamma}| > 0.7$ ns è riportata in figura 6.2 dove sono mostrati i piani (E_e, E_γ) e $(\cos \Theta_{e\gamma}, t_{e\gamma})$. Le distribuzioni a sinistra corrispondono $\Delta t_{e\gamma} < 0$, quelle a destra a $\Delta t_{e\gamma} > 0$. Nei grafici sono riportate alcune regioni di isoprobabilità: la linea blu continua delimita la regione di confinamento degli eventi di segnale entro una σ della PDF bidimensionale (39.3%), quella tratteggiata corrisponde a 1.64σ (74.2%) e la punteggiata a 2σ (86.5%). Da notare che per ottenere le distribuzioni (c) e (d) le *sideband* sono state estese in modo da includere anche gli eventi con -0.7 ns $< \Delta t_{e\gamma} < 0$ e $0 < \Delta t_{e\gamma} < 0.7$ ns che non appartengono alla B-B in quanto $E_\gamma < 48$ MeV.

Applicando l'analisi di *Likelihood* descritta precedentemente alle *sideband* temporali (in cui per definizione $N_{sig} = N_{RMD} = 0$), si ottiene un limite superiore per il numero di eventi di segnale nell'ipotesi di segnale nullo. Al 90% di CL si ha $N_{sig} < 4 \div 6$. Per convertire questo limite in un limite superiore su $BR_{\mu \rightarrow e\gamma}$ è necessario un fattore di normalizzazione che si ricava dal numero misurato di positroni di Michel, acquisiti con un trigger dedicato, tenendo conto delle diverse accettanze ed efficienze dell'apparato per i due diversi tipi di eventi ($\mu \rightarrow e\gamma$ e positroni). Il limite superiore ottenuto è: $BR_{\mu \rightarrow e\gamma} < 4 \div 6 \cdot 10^{-12}$, valore confermato da un'analisi indipendente su un campione di *Toy Montecarlo*. Si ricava così una valutazione della sensibilità dell'esperimento.

6.3 Analisi all'interno della B-B

A questo punto non resta che aprire e osservare gli eventi nella B-B

In figura 6.3 è mostrato il confronto fra i dati sperimentali (punti neri) e le PDF determinate per i dati del 2009 in regioni vicine a quelle del segnale ($50 \leq E \leq 58$ MeV, $176^\circ \leq \Theta_{e\gamma} \leq 180^\circ$, $|\Delta t_{e\gamma}| \leq 0.7$ ns): in blu il segnale, in rosso il decadimento radiativo e in verde il fondo accidentale. Tutte le distribuzioni sono normalizzate allo stesso numero di eventi. Da notare che nelle PDF di $\Delta t_{e\gamma}$ (figura 6.3(a)) il segnale e il radiativo si sovrappongono (la linea blu è sotto la rossa),

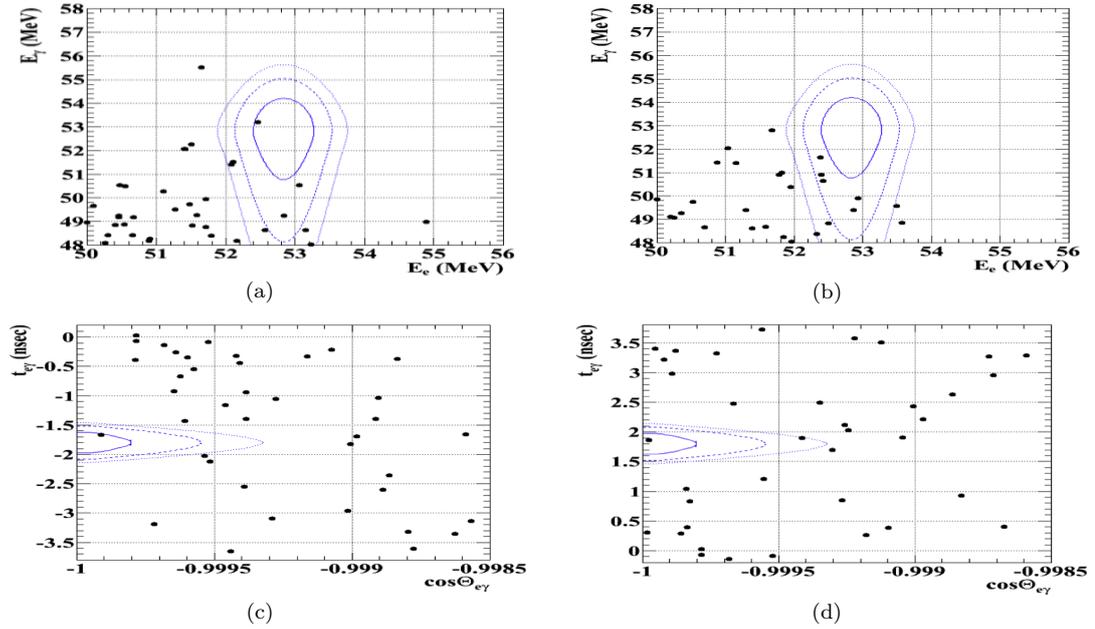


Figura 6.2: Distribuzione degli eventi nelle *Sideband*: in (a) la distribuzione nel piano (E_e, E_γ) per eventi nella *sideband* temporale sinistra ($\Delta t_{e\gamma} < -0.7$ ns), in (b) l'analoga nella *sideband* temporale destra ($\Delta t_{e\gamma} > 0.7$ ns), in (c) la distribuzione nel piano $(\Delta t_{e\gamma}, \cos \Theta_{e\gamma})$ per $\Delta t_{e\gamma} < 0$ e in (d) la corrispondente per $\Delta t_{e\gamma} > 0$.

mentre il fondo è piatto, come atteso. Si può osservare, come prevedibile, che i dati sperimentali si dispongono essenzialmente in corrispondenza della PDF del fondo accidentale.

Nella figura 6.4 sono mostrate per la B-B le distribuzioni analoghe a quelle riportate in figura 6.2 per le *sideband*. Si noti che (figura 6.4(a)) nella regione di segnale corrispondente ad un σ nel piano (E_e, E_γ) cadono 5 eventi. Gli eventi più interessanti possono essere identificati nei due grafici ordinandoli con un numero progressivo in base al rapporto delle *Likelihood*: $L_{sig}/(L_{RMD} + L_{BG})$. Gli eventi che stanno entro un σ nel piano dalle energie sono contrassegnati con 1, 2, 3, 5 e 8. Gli eventi 1, 2 e 3 si trovano entro 1.64σ nel grafico $(\cos \Theta_{e\gamma}, t_{e\gamma})$ e l'evento 5 entro 2σ . L'evento 8 invece è al confine della linea punteggiata. Mentre la sensibilità dell'esperimento è $4 \div 6 \cdot 10^{-12}$, a causa di questi cinque eventi il limite preliminare ottenuto dall'esperimento con i dati del 2009 è $BR_{\mu \rightarrow e\gamma} < 1.5 \cdot 10^{-11}$ al 90% di CL. Il *best value* del numero di eventi di segnale ottenuto dalla massimizzazione della *Likelihood* è $N_{sig} = 3$ eventi.

Per concludere riportiamo in tabella 6.2 il sommario dei risultati preliminari dell'esperimento sui dati del 2009 [64].

Esperimento	Anno	R_μ (Hz)	$\sigma(\Delta E_e)$ (%)	$\sigma_R(\Delta E_\gamma)$ (%)	$\sigma(\Delta t_{e\gamma})$ (ns)	$\sigma(\Delta \Theta_{e\gamma})$ (mrad)	Limite (90% C.L.)
MEG (preliminare)	2009	$2.9 \cdot 10^7$	0.74 (core)	2.1 ($w > 2$ cm)	0.142 (core)	9.1	$< 1.5 \cdot 10^{-11}$

Tabella 6.2: Risultati preliminari dell'analisi di MEG per i dati 2009. Le risoluzioni sono quotate in σ_R per E_γ e in σ per le altre variabili. Con *core* s'intende la larghezza della gaussiana più stretta in un fit con due gaussiane sovrapposte.

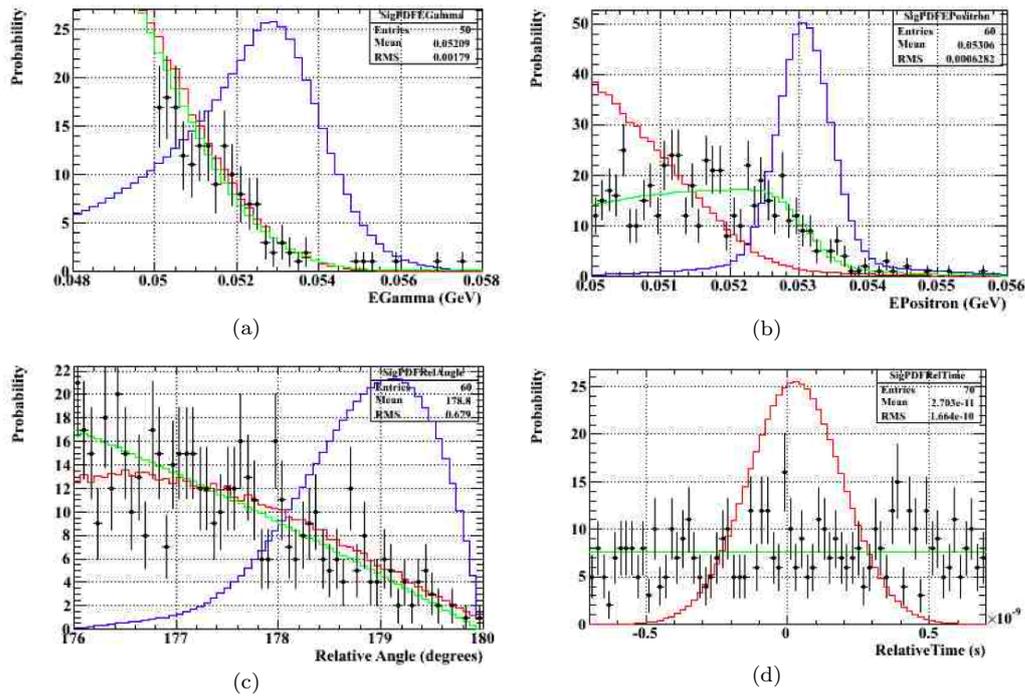


Figura 6.3: Confronto fra le PDF del segnale (in blu), del decadimento radiativo (in rosso) e del fondo (verde) ed i dati sperimentali (punti neri). In (a) il'energia dei γ , in (b) quella dei positroni, in (c) l'angolo relativo $e - \gamma$ ed in (d) il loro tempo relativo (segnale e radiativo sono sovrapposti). Tutte le curve sono normalizzate allo stesso numero di eventi.

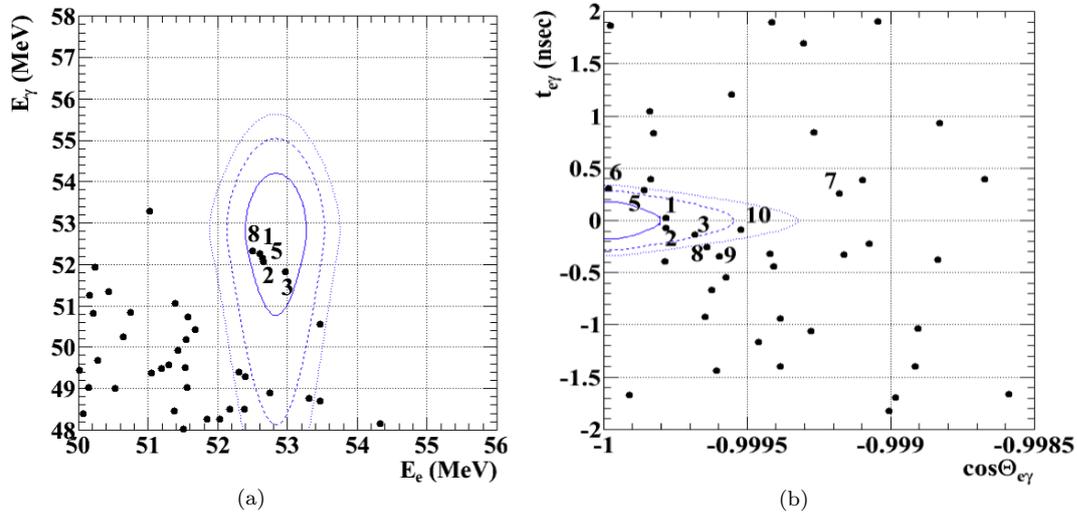


Figura 6.4: Distribuzione degli eventi dopo l'apertura della *Blinding-Box*: in (a) la distribuzione delle energie, in (b) quella di $t - \cos\Theta_{e\gamma}$. Stesso numero corrisponde stesso evento in entrambe le figure. Gli eventi sono ordinati in base al rapporto delle *Likelihood* $L_{sig}/(L_{RMD} + L_{BG})$.



Conclusioni

Il lavoro di questa tesi ha approntato dei miglioramenti alla conoscenza della propagazione della luce di scintillazione e delle prestazioni del calorimetro elettromagnetico. Tramite uno studio approfondito delle riflessioni interne della luce di scintillazione e l'introduzione della *riflessione polarizzata*, è stato migliorato l'accordo tra la simulazione Montecarlo ed i dati reali. Questo consente di determinare con elevata accuratezza le efficienze quantiche dei PMT e migliorare la risoluzione in energia con l'algoritmo di ricostruzione chiamato *Linear Fit*. In particolare risulta possibile misurare le efficienze quantiche in Xenon liquido, eliminando così gli effetti dovuti alla temperatura presenti invece quando si utilizza lo Xenon gassoso. In Xenon liquido è inoltre possibile misurare le QE frequentemente e durante la presa dati, mentre in gas ciò è possibile solo una volta all'anno.

I risultati di questa tesi hanno messo in luce anche quali siano gli studi necessari per approfondire ulteriormente la conoscenza di questo rivelatore; citiamo fra gli altri l'andamento dell'indice di rifrazione del PEEK (che copre la superficie della faccia interna) in funzione della lunghezza d'onda e la risposta della finestra in quarzo dei fotomoltiplicatori in funzione dell'angolo d'incidenza dei fotoni.

L'obiettivo finale, una volta ottenuta una adeguata conoscenza del calorimetro, sarà di ottenere risoluzioni in energia con il *Linear Fit* le più possibili vicine a 1.2%.



Appendice A

Teoria della riflessione

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana, periodica e sinusoidale. Chiamiamo con mezzo '1' lo Xenon liquido, in cui viaggia inizialmente l'onda e in cui si propaga l'onda riflessa, e mezzo '2' quello in cui si trasmette l'onda rifratta. Indichiamo quindi con ϵ_1 e μ_1 rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica dello Xenon, mentre con ϵ_2 , μ_2 e σ_2 la costante dielettrica, la permeabilità magnetica e la conduttanza del mezzo '2'. Si noti che la conduttanza dello Xenon (σ_1) è nulla. Entrambi i mezzi sono considerati omogenei, isotropici e non ferromagnetici per cui $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Studiamo due casi: l'onda del campo elettrico con polarizzazione perpendicolare al piano incidente (x, z) e l'onda del campo elettrico con polarizzazione parallela¹ ad esso. Il piano di incidenza (x, z) è definito come il piano in cui giacciono l'onda incidente \mathbf{k} e la normale alla superficie d'interfaccia \mathbf{n} . Dichiariamo anzitutto le equazioni di Maxwell nel sistema di unità di misura di Gauss in assenza di cariche:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Inizialmente i due casi saranno studiati considerando un'onda che incida perpendicolarmente sul piano d'interfaccia tra i due mezzi, per poi applicare una rotazione e studiare il caso generico con un angolo d'incidenza arbitrario θ_i . Il sistema di riferimento è riportato in figura A.1, con y entrante nel piano. La superficie d'interfaccia è il piano (x, y) .

A.1 Incidenza perpendicolare al piano d'interfaccia tra i due mezzi

A.1.1 Polarizzazione perpendicolare

Iniziamo col caso di polarizzazione perpendicolare al piano d'incidenza (x, z) , detta polarizzazione s . Il campo elettrico incidente \mathbf{E} è quindi diretto lungo y (entrante nel foglio). Dalla prima della (A.1) si conclude subito che \mathbf{E} non dipende da y e conseguentemente dalla quarta che nemmeno \mathbf{H} dipende da y . Per questo studio è di interesse il piano dipendente dal tempo, per cui si possono porre uguali a zero le componenti che non dipendono da t . La (A.1) diventa quindi

¹Definiamo 'parallela' l'onda che giace sul piano d'incidenza. La definizione in se è impropria, ma verrà usata per comodità.

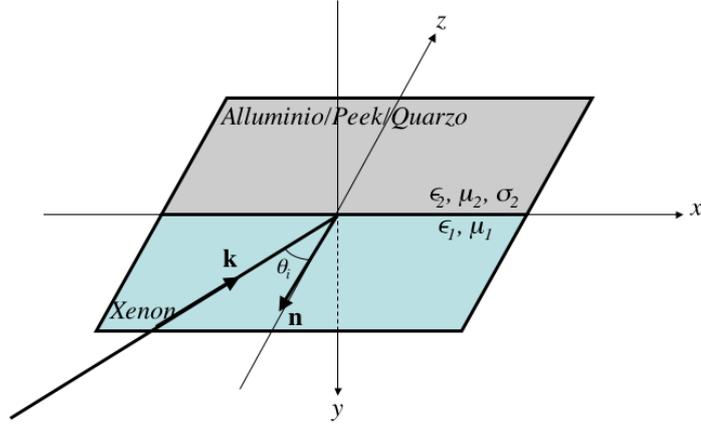


Figura A.1: Sistema di riferimento usato.

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} E_y + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

da cui si ricava facilmente la così detta *equazione telegrafica*:

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \quad (\text{A.3})$$

Le soluzioni generiche di onda piana e periodica in tempo della A.3 sono della forma $E_y = E_s e^{Px+Qz} e^{2\pi i \nu t}$, con costanti $P, Q \in \mathbb{C}$, ed E_s che indica l'ampiezza costante (s è la polarizzazione). Dalla (A.3) si ricava:

$$\frac{4\pi^2\nu^2}{c^2} \left(-\mu\epsilon + i\frac{2\sigma\mu}{\nu} \right) = P^2 + Q^2 \quad (\text{A.4})$$

Senza perdere alcuna generalità nella forma d'onda, si possono considerare $P \in \mathbb{R}$ e $Q \in \mathbb{C}$, per cui si scrive $Q = Q_R + iQ_I$ con $Q_R, Q_I \in \mathbb{R}$. Separando le variabili reali e immaginarie nella (A.4), si ottiene:

$$\begin{cases} -\frac{4\pi^2\nu^2\mu\epsilon}{c^2} = P^2 + Q_R^2 - Q_I^2 \\ \frac{4\pi^2\nu^2\mu\sigma}{c^2} = 2Q_R Q_I \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Per risolvere il sistema occorre comprendere il significato fisico di P e Q . Intanto si osserva che se $P = 0$ l'equazione delle onde diventa $E_y = E_s e^{Q_R z} e^{2\pi i (\nu t + \frac{Q_I}{2\pi} z)}$. Ciò significa che lungo z sia la fase che l'ampiezza diminuiscono allo stesso modo: questa situazione si indica affermando



che il *piano delle fasi costanti* e il *piano delle ampiezze costanti* sono paralleli. Un'onda di questo tipo è detta **onda omogenea**. Nel caso in cui $P \neq 0$ il piano della fase costante e quello dell'ampiezza costante saranno sfasati fra loro e l'onda è detta **onda disomogenea**.

Onda omogenea: Nel caso di onda omogenea il sistema (A.5) si risolve facilmente, ottenendo:

$$\begin{cases} Q_R = -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2}} \right)} = -\frac{2\pi}{\lambda} k_0 \\ Q_I = -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2}} \right)} = -\frac{2\pi}{\lambda} n_0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

in cui $\lambda = \frac{c}{\nu}$ è la lunghezza d'onda, n_0 è l'indice di rifrazione dell'onda omogenea e k_0 è l'indice di assorbimento dell'onda omogenea definiti da:

$$\begin{cases} k_0 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2}} \right)} \\ n_0 = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2}} \right)} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Si noti che il segno negativo in (A.6) è dovuto ad una scelta arbitraria: siccome si sta considerando un'onda che si propaga nel verso delle z crescenti, se ci fosse un segno positivo l'ampiezza $|E_y| = |E_s|e^{Q_R z}$ divergerebbe. Risolvendo (A.2), si ottiene:

$$\begin{aligned} E_y &= E_s e^{-\frac{2\pi k_0}{\lambda} z} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n_0}{\lambda} z)} \\ H_x &= -E_s \frac{n_0 - ik_0}{\mu} e^{-\frac{2\pi k_0}{\lambda} z} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n_0}{\lambda} z)} \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Si nota subito che il campo magnetico \mathbf{H} è diretto lungo $-x$. La figura A.2 mostra la direzione dei campi per un'onda omogenea con polarizzazione s .

Onda disomogenea: Quando il termine P non è nullo, si può comunque scrivere Q_R e Q_I nella forma $Q_R = -\frac{2\pi}{\lambda} k$ e $Q_I = -\frac{2\pi}{\lambda} n$ (in cui ovviamente $n \neq n_0$ e $k \neq k_0$). Risolvendo a questo punto la (A.5) si ottiene che $P = \pm \left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 - k^2 - \epsilon\mu} \right)$ da cui possiamo ricavare facilmente lo sfasamento φ fra i piani delle fasi costanti e delle ampiezze costanti:

$$\tan \varphi = -\frac{P}{Q_R} = \pm \frac{\sqrt{n^2 - k^2 - \epsilon\mu}}{k} \quad (\text{A.9})$$

(si noti che anche P ha un'ambiguità di segno, che inglobiamo in $\tan \varphi$; tale ambiguità sarà risolta spontaneamente dalla scelta del quadrante a cui appartiene φ).

La (A.6) diventa allora:

$$\begin{cases} Q_R = -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} = -\frac{2\pi}{\lambda} k \\ Q_I = -\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} = -\frac{2\pi}{\lambda} n \\ -\frac{P}{Q_R} = \tan \varphi = \pm \frac{\sqrt{n^2 - k^2 - \epsilon\mu}}{k} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

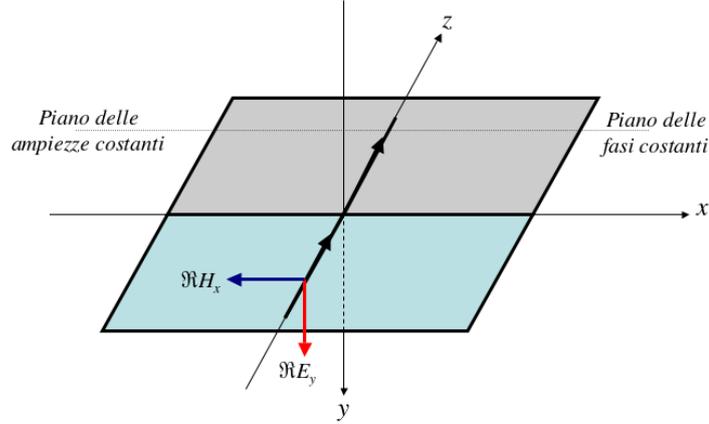


Figura A.2: Onda omogenea polarizzata s ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia. In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

e gli indici assumono la forma generale:

$$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} \\ n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2\nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Come si può subito notare ponendo $\varphi = 0$ ci si riconduce al caso di un'onda omogenea ed i piani delle fasi costanti e delle ampiezze costanti sono paralleli. Tornando all'equazione delle onde, $E_y = E_s e^{Px+Q_Rz} e^{2\pi i(\nu t + \frac{Q_L}{2\pi}z)} = E_s e^{-Q_R(-\frac{P}{Q_R}x-z)} e^{2\pi i(\nu t + \frac{Q_L}{2\pi}z)} = E_s e^{-Q_R(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t + \frac{Q_L}{2\pi}z)}$ e quindi la (A.8) diventa:

$$\begin{aligned} E_y &= E_s e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda}z)} \\ H_x &= -E_s \frac{n - ik}{\mu} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda}z)} \\ H_z &= E_s \frac{ik \tan \varphi}{\mu} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda}z)} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

La figura A.3 mostra le direzioni dei campi ed i piani delle fasi e delle ampiezze costanti per la polarizzazione s di un'onda disomogenea.

A.1.2 Polarizzazione parallela

Discutiamo adesso il caso della polarizzazione parallela al piano di incidenza, detta polarizzazione p . Il campo elettrico ha in generale le due componenti E_x e E_z , per cui, dalla terza equazione di (A.1), \mathbf{H} ha solo la componente H_y . Anche qui dalla seconda della (A.1) scopriamo che \mathbf{H}

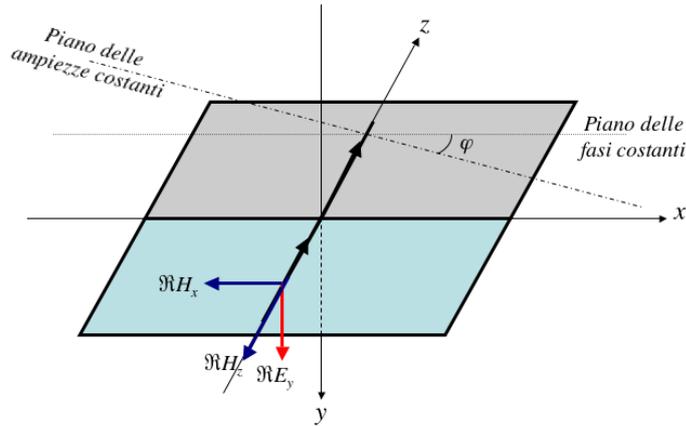


Figura A.3: Onda disomogenea polarizzata s ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia. In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

non dipende da y e quindi nemmeno \mathbf{E} . Come nel caso precedente, tutte le componenti che non dipendono dal tempo sono considerate nulle. La (A.1) diventa quindi:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} E_x + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

e l'equazione telegrafica (A.3) viene riscritta nella forma:

$$\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad (\text{A.14})$$

La soluzione generale per la componente x del campo elettrico ha la forma: $E_x = E_p e^{Px+Q_R z} e^{2\pi i(\nu t + \frac{Q_I}{2\pi} z)}$. La soluzione per E_z si ottiene dalla A.13.

Onda omogenea: Considerando $P = 0$ sono ancora valide le espressioni in (A.6) e (A.7) ed otteniamo le soluzioni per i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} E_x &= E_p e^{-\frac{2\pi k_0}{\lambda} z} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n_0}{\lambda} z)} \\ E_z &= 0 \\ H_y &= E_p \frac{n_0 - ik_0}{\mu} e^{-\frac{2\pi k_0}{\lambda} z} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n_0}{\lambda} z)} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Si nota subito che il campo elettrico \mathbf{E} è lungo x e che il campo $\mathbf{H} = H_y \hat{y}$ è entrante nel piano, come mostrato nella figura A.4.

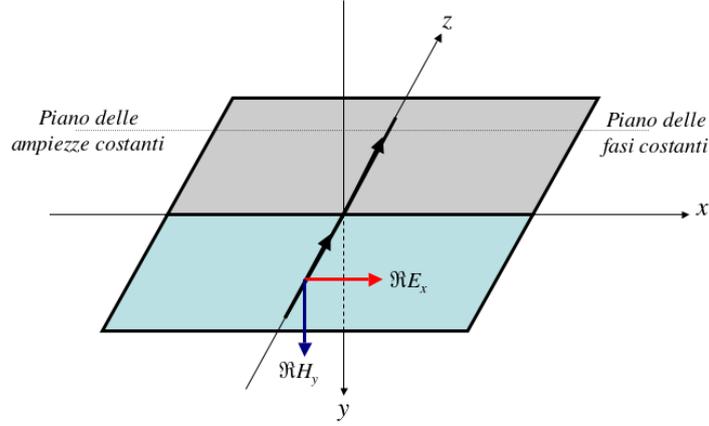


Figura A.4: Onda omogenea polarizzata p ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia. In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

Onda disomogenea: Considerando $P \neq 0$ sono ancora valide le espressioni in (A.10) e (A.11) ed otteniamo le soluzioni per i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} E_x &= E_p e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ E_z &= -E_p \frac{ik \tan \varphi}{n - ik} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ H_y &= E_p \frac{n^2 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} - i2nk}{\mu(n - ik)} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Nella figura A.5 è mostrata una rappresentazione dei campi \mathbf{E} e \mathbf{H} per un'onda piana disomogenea ad incidenza perpendicolare all'interfaccia.

Ricapitolando: Per comodità si riportano di nuovo le espressioni generali delle equazioni (A.12) e (A.16):

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = E_s e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ H_x = -E_s \frac{n - ik}{\mu} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ H_z = E_s \frac{ik \tan \varphi}{\mu} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = E_p e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ E_z = -E_p \frac{ik \tan \varphi}{n - ik} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \\ H_y = E_p \frac{n^2 - \frac{k^2}{\cos^2 \varphi} - i2nk}{\mu(n - ik)} e^{\frac{2\pi k}{\lambda}(x \tan \varphi - z)} e^{2\pi i(\nu t - \frac{n}{\lambda} z)} \end{array} \right.$$

dove n e k sono, come mostrato nella (A.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2 \nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} \\ n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\epsilon^2 \nu^2 \cos^2 \varphi}} \right)} \end{array} \right.$$

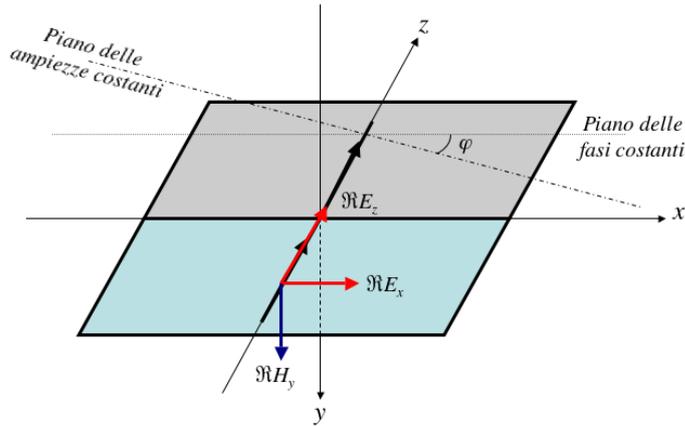


Figura A.5: Onda disomogenea polarizzata p ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia. In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

Si ricorda infine che il caso di onda omogenea si ottiene semplicemente ponendo $\varphi = 0$.

A.2 Incidenza ad angolo qualsiasi sul piano d'interfaccia tra i due mezzi

Iniziamo anzitutto col fissare una convenzione per i nomi delle variabili: con il pedice i si indicano le variabili riferite all'onda incidente, con il pedice r quelle riferite all'onda riflessa e con il pedice t quelle dell'onda trasmessa (o rifratta). Quindi in particolare si indicheranno con θ_i , θ_r e θ_t gli angoli rispettivamente formati con la normale dall'onda incidente, dall'onda riflessa e dall'onda trasmessa e con $\mathbf{E}_i/\mathbf{H}_i$, $\mathbf{E}_r/\mathbf{H}_r$ e $\mathbf{E}_t/\mathbf{H}_t$ i campi elettrici/magnetici rispettivamente delle onde incidente, riflessa e trasmessa.

Per giungere al caso generico partendo dal caso particolare discusso nel paragrafo A.1, è sufficiente eseguire una rotazione del sistema di riferimento. In base alla figura A.6 si può notare che i campi dell'onda incidente sono ruotati di $-\theta_i$ e quindi gli assi devono essere ruotati di $+\theta_i$:

$$\begin{cases} x \mapsto x \cos \theta_i - z \sin \theta_i \\ z \mapsto x \sin \theta_i + z \cos \theta_i \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Usando lo stesso metodo, possiamo considerare i campi riflessi come ruotati di $-(180 - \theta_r)$ e quelli trasmessi come ruotati di $-\theta_t$ e quindi è sufficiente ruotare gli assi, rispettivamente di $180 - \theta_r$ e θ_t :

$$\begin{cases} x \mapsto -x \cos \theta_r - z \sin \theta_r \\ z \mapsto x \sin \theta_r - z \cos \theta_r \end{cases} \quad \begin{cases} x \mapsto x \cos \theta_t - z \sin \theta_t \\ z \mapsto x \sin \theta_t + z \cos \theta_t \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Nel caso che stiamo trattando, l'onda incidente si propaga all'interno dello Xenon ($\sigma_1 = 0$): dalla (A.11) si ricava che $k_1 = 0 = k_{01}$ e $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = n_{01}$ e quindi le onde incidenti e riflesse

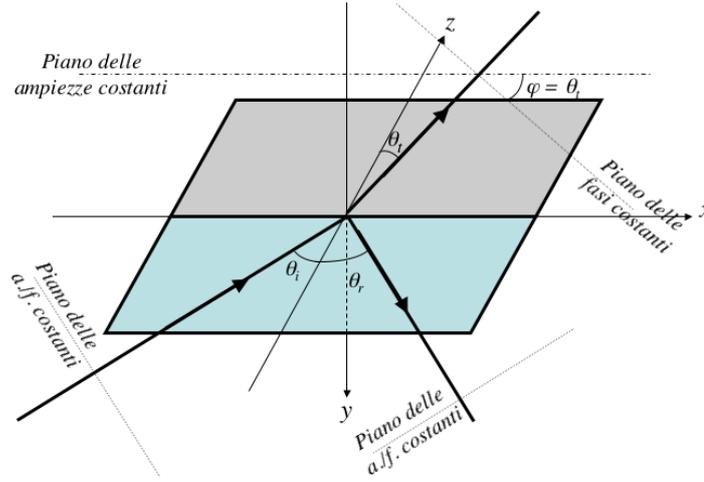


Figura A.6: Geometria di un'onda ad incidenza qualsiasi.

sono omogenee ($\varphi = 0$). L'onda trasmessa in generale non è omogenea, ma è possibile scegliere opportunamente φ . Infatti il fronte d'onda che attraversa il mezzo assorbente percorre ad ogni strato infinitesimo la medesima distanza. Tali strati sono paralleli al piano d'interfaccia dei due mezzi, per cui si può assumere che il mezzo assorba, e quindi riduca, l'ampiezza dell'onda parallelamente al piano d'interfaccia. Da questa considerazione concludiamo che il piano delle ampiezze costanti è parallelo al piano dell'interfaccia e il piano delle fasi costanti è perpendicolare al vettore d'onda. Si ottiene quindi in maniera naturale l'identificazione $\varphi = \theta_t$ e le (A.11) diventano (4.1).

A questo punto ruotare i campi lungo x e lungo z è semplice. Si chiamino $A_{x'}$ e $A_{z'}$ i campi, rispettivamente lungo x e lungo z , incidenti perpendicolarmente sull'interfaccia e A_x e A_z quelli misurati nel sistema di riferimento ruotato. La trasformazione, considerando omogenee le onde incidenti e riflesse, è la seguente:

$$\begin{cases} A_{x_i} = A_{x'_i} \cos \theta_i \\ A_{z_i} = -A_{x'_i} \sin \theta_i \end{cases} \quad \begin{cases} A_{x_r} = -A_{x'_r} \cos \theta_r \\ A_{z_r} = -A_{x'_r} \sin \theta_r \end{cases} \quad \begin{cases} A_{x_t} = A_{x'_t} \cos \theta_t + A_{z'_t} \sin \theta_t \\ A_{z_t} = -A_{x'_t} \sin \theta_t + A_{z'_t} \cos \theta_t \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

A.2.1 Polarizzazione s

Usando le equazioni (A.17), (A.18) e (A.19) per le onde incidenti, riflesse e trasmesse, la (A.12) per l'onda incidente diventa:

$$\begin{aligned} E_{y_i} &= E_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \\ H_{x_i} &= -\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i E_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \\ H_{z_i} &= \frac{n_1}{\mu_1} \sin \theta_i E_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$



Chiamando l'ampiezza dell'onda riflessa R_s (con le dimensioni di un campo elettrico) e considerando un possibile sfasamento dopo la riflessione di un angolo δ_{s_r} , la (A.12) per l'onda riflessa prende la forma:

$$\begin{aligned} E_{y_r} &= R_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)]} e^{i\delta_{s_r}} \\ H_{x_r} &= \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_r R_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)]} e^{i\delta_{s_r}} \\ H_{z_r} &= \frac{n_1}{\mu_1} \sin \theta_r R_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)]} e^{i\delta_{s_r}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Per l'onda trasmessa, invece, indicando con D_s l'ampiezza e con δ_{s_t} l'eventuale sfasamento, la (A.12) diventa:

$$\begin{aligned} E_{y_t} &= D_s e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} e^{i\delta_{s_t}} \\ H_{x_t} &= -\frac{n_2 \cos^2 \theta_t - ik_2}{\mu_2 \cos \theta_t} D_s e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} e^{i\delta_{s_t}} \\ H_{z_t} &= \frac{n_2 \sin \theta_t}{\mu_1} D_s e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)]} e^{i\delta_{s_t}} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Supponendo di conoscere E_s , abbiamo ancora 4 incognite: R_s , D_s , δ_{s_r} e δ_{s_t} ; occorre quindi considerare le condizioni di continuità dei campi sull'interfaccia ($z = 0$):

$$\begin{cases} E_{y_i} + E_{y_r} = E_{y_t} \\ H_{z_i} + H_{z_r} = H_{z_t} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Queste relazioni hanno senso solo se si ipotizza che all'interfaccia lo strato di transizione fra i due mezzi sia abbastanza sottile da non causare effetti, e che le correnti superficiali siano trascurabili (ipotesi verificate nel caso di nostro interesse).

Usando la prima relazione del sistema (A.23) su $z = 0$ si ottiene:

$$E_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda} x \sin \theta_i]} + R_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda} x \sin \theta_r] + i\delta_{s_r}} = D_s e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda} x \sin \theta_t] + i\delta_{s_t}} \quad (\text{A.24})$$

che semplificando i fattori comuni diventa:

$$E_s + R_s e^{-2\pi i \frac{n_1}{\lambda} x (\sin \theta_r - \sin \theta_i) + i\delta_{s_r}} = D_s e^{-2\pi i \frac{x}{\lambda} (n_2 \sin \theta_t - n_1 \sin \theta_i) + i\delta_{s_t}} \quad (\text{A.25})$$

Affinché la A.32 sia valida per ogni x , occorre che siano simultaneamente verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

che è la ben nota legge di Snell. A questo punto il sistema (A.23) diventa:

$$\begin{cases} E_s + R_s e^{i\delta_{s_r}} = D_s e^{i\delta_{s_t}} \\ \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i (E_s - R_s e^{i\delta_{s_r}}) = \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t (1 - \frac{ik_2}{n_2 \cos^2 \theta_t}) D_s e^{i\delta_{s_t}} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

che può essere risolto separando le parti reali e immaginarie. Si determinano così tutte le incognite [65, 66] e si giunge così all'obiettivo finale, il calcolo dell'ampiezza dell'onda riflessa R_s la cui espressione è:



$$R_s = -E_s \sqrt{\frac{\frac{n_2^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_t (\cos \theta_t - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_i)^2 + 1}{\frac{n_2^2}{k_2^2} \cos^2 \theta_t (\cos \theta_t + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_i)^2 + 1}} \quad (\text{A.28})$$

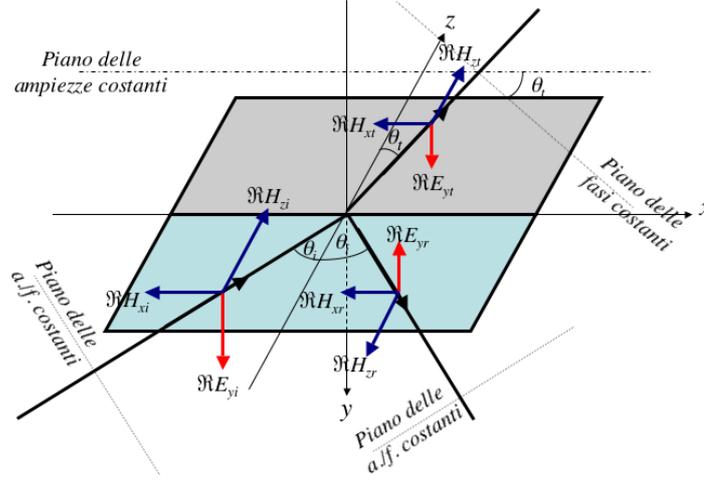


Figura A.7: Onda polarizzata s ad incidenza θ_i . In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

Si noti il segno negativo, che indica il cambiamento di verso di E_{y_r} rispetto a E_{y_i} . La rappresentazione grafica dei campi di un'onda polarizzata s con incidenza arbitraria θ_i è mostrata nella figura A.7. Un'osservazione molto importante è necessaria nel caso in cui $k_2 = 0$ (come nel caso Dielettrico-Dielettrico trattato nel paragrafo 4.1): con tale condizione l'argomento della radice è un quadrato perfetto e quindi R_s può cambiare verso rispetto al campo E_{y_r} mostrato nella figura A.7. Questo può avvenire quando $\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i < 0$ come sarà discusso nel paragrafo B.4.

A.2.2 Polarizzazione p

Per la polarizzazione p , sempre usando le (A.17), (A.18) e (A.19), si ottiene che la (A.16) per l'onda incidente diventa:

$$\begin{aligned} E_{x_i} &= \cos \theta_i E_p e^{2\pi i [\nu t - \frac{n_1}{\lambda} (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \\ E_{z_i} &= -\sin \theta_i E_p e^{2\pi i [\nu t - \frac{n_1}{\lambda} (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \\ H_{y_i} &= \frac{n_1}{\mu_1} E_p e^{2\pi i [\nu t - \frac{n_1}{\lambda} (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)]} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Indicando con R_p e D_p le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa e con δ_{p_r} e δ_{p_t} il loro eventuale sfasamento, per l'onda riflessa si ottiene:



$$\begin{aligned}
E_{x_r} &= -\cos \theta_r R_p e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_r} \\
E_{z_r} &= -\sin \theta_r R_p e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_r} \\
H_{y_r} &= \frac{n_1}{\mu_1} R_p e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_1}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_r}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

e per l'onda trasmessa:

$$\begin{aligned}
E_{x_t} &= -\cos \theta_t \frac{n_2 - i \frac{k_2}{\cos^2 \theta_t}}{n_2 - ik_2} D_p e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_t} \\
E_{z_t} &= -\sin \theta_t \frac{n_2}{n_2 - ik_2} D_p e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_t} \\
H_{y_t} &= \frac{n_2^2 - \frac{k_2^2}{\cos^2 \theta_t} - in_2 k_2}{\mu_2(n_2 - ik_2)} D_p e^{-\frac{2\pi k_2 z}{\lambda \cos \theta_t}} e^{2\pi i[\nu t - \frac{n_2}{\lambda}(x \sin \theta_r + z \cos \theta_r)]} e^{i\delta p_t}
\end{aligned} \tag{A.31}$$

La condizione di continuità all'interfaccia assume la forma:

$$\begin{cases} E_{x_i} + E_{x_r} = E_{x_t} \\ H_{y_i} + H_{y_r} = H_{y_t} \end{cases} \tag{A.32}$$

da cui si ricava nuovamente la legge di Snell (A.26) e l'espressione per R_p :

$$R_p = E_p \sqrt{\frac{\frac{n_2^2}{k_2^2} (\cos \theta_i - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_t)^2 + (\cos \theta_i - \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \frac{1}{\cos \theta_t})^2 + \cos^2 \theta_i (3 - \frac{2}{\cos^2 \theta_t} + \frac{k_2^2}{n_2^2 \cos^4 \theta_t})}{\frac{n_2^2}{k_2^2} (\cos \theta_i + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \cos \theta_t)^2 + (\cos \theta_i + \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} \frac{1}{\cos \theta_t})^2 + \cos^2 \theta_i (3 - \frac{2}{\cos^2 \theta_t} + \frac{k_2^2}{n_2^2 \cos^4 \theta_t})}} \tag{A.33}$$

Anche in questo caso siamo interessa solo a R_p (per le altre variabili consultare [65, 66]). Nella figura A.8 è mostrata la rappresentazione grafica dei campi di un'onda polarizzata p , con gli opportuni cambi di direzione, rispetto alle (A.29), in accordo con le (A.30). Si osservi che, come nella polarizzazione s , se $k_2 = 0$ anche R_p può cambiare segno, invertendo i versi dei campi E_{x_r} e E_{z_r} rispetto alla figura A.8. Ciò avviene nel caso in cui $\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t < 0$ come sarà discusso nel paragrafo B.4.

A.3 Coefficiente di riflessione

Adesso non resta che calcolare il coefficiente di riflessione, che è dato dal rapporto tra il flusso di energia riflessa e il flusso di energia incidente, entrambe mediate nel tempo. Per calcolare tale flusso, si usa il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{A.34}$$

le cui espressioni sono, per la polarizzazione s :

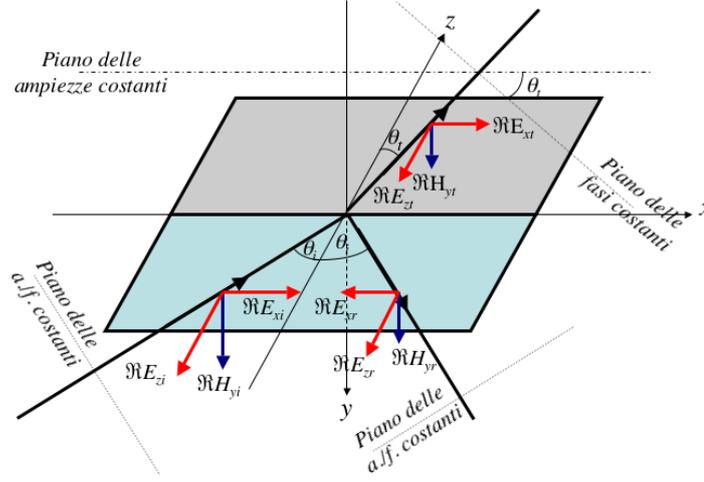


Figura A.8: Onda polarizzata p ad incidenza θ_i . In nero il vettore d'onda, in rosso il campo elettrico e in blu quello magnetico.

$$\begin{cases} \Re S_{x_i} = \frac{c}{8\pi} \Re(E_{y_i} \cdot H_{z_i}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \sin \theta_i E_s^2 \\ \Re S_{y_i} = 0 \\ \Re S_{z_i} = -\frac{c}{8\pi} \Re(E_{y_i} \cdot H_{x_i}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \cos \theta_i E_s^2 \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{cases} \Re S_{x_r} = \frac{c}{8\pi} \Re(E_{y_r} \cdot H_{z_r}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \sin \theta_r R_s^2 \\ \Re S_{y_r} = 0 \\ \Re S_{z_r} = -\frac{c}{8\pi} \Re(E_{y_r} \cdot H_{x_r}) = -\frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \cos \theta_r R_s^2 \end{cases}$$

e per la polarizzazione p :

$$\begin{cases} \Re S_{x_i} = -\frac{c}{8\pi} \Re(E_{z_i} \cdot H_{y_i}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \sin \theta_i E_p^2 \\ \Re S_{y_i} = 0 \\ \Re S_{z_i} = \frac{c}{8\pi} \Re(E_{x_i} \cdot H_{y_i}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \cos \theta_i E_p^2 \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{cases} \Re S_{x_r} = -\frac{c}{8\pi} \Re(E_{z_r} \cdot H_{y_r}) = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \sin \theta_r R_p^2 \\ \Re S_{y_r} = 0 \\ \Re S_{z_r} = \frac{c}{8\pi} \Re(E_{x_r} \cdot H_{y_r}) = -\frac{cn_1}{8\pi\mu_1} \cos \theta_r R_p^2 \end{cases}$$

La quantità di energia per le onde incidenti e riflesse è data quindi, per entrambe le polarizzazioni, da:

$$\begin{cases} |\Re S_{s_i}| = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} E_s^2 \\ |\Re S_{s_r}| = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} R_s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} |\Re S_{p_i}| = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} E_p^2 \\ |\Re S_{p_r}| = \frac{cn_1}{8\pi\mu_1} R_p^2 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

Per quanto riguarda l'energia trasmessa, la situazione è un po' più complessa in quanto il vettore di Poynting delle onde p trasmesse non è parallelo al proprio vettore d'onda. In questa tesi non



è però di particolare interesse studiare la trasmissione nel mezzo '2', per cui si rimanda a [65, 66] per una discussione più dettagliata.

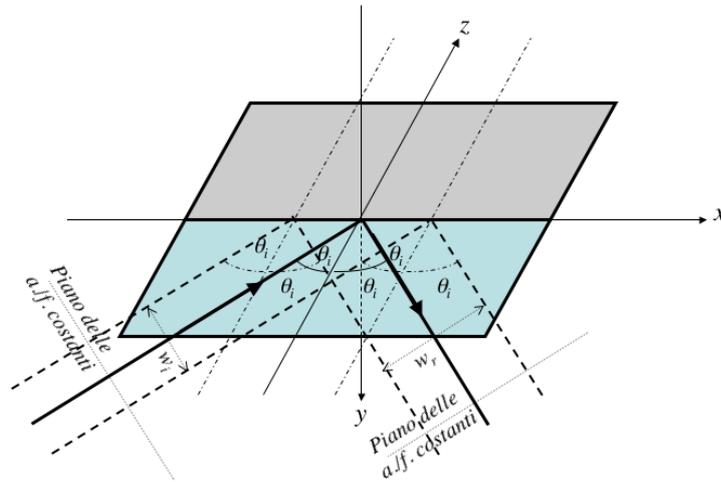


Figura A.9: Geometria dei flussi di energia incidente e riflessa.

Per completare il calcolo del rapporto dei flussi è necessario considerare la larghezza del fascio incidente w_i e di quello riflesso w_r . Dalla geometria mostrata in figura A.9, si osserva immediatamente che, per la legge di Snell, vale $w_i = w_r$. Quindi i coefficienti di riflessione \bar{r} sono

$$\begin{aligned}\bar{r}_s &= \frac{\bar{F}_{s_r}}{\bar{F}_{s_i}} = \frac{w_r |\Re S_{s_r}|}{w_i |\Re S_{s_i}|} = \frac{R_s^2}{E_s^2} \\ \bar{r}_p &= \frac{\bar{F}_{p_r}}{\bar{F}_{p_i}} = \frac{w_r |\Re S_{p_r}|}{w_i |\Re S_{p_i}|} = \frac{R_p^2}{E_p^2}\end{aligned}\tag{A.38}$$

come riportato nelle (4.2).



Appendice B

Implementazione delle riflessioni nel montecarlo

La trattazione dei fotoni di scintillazione nel MC del calorimetro elettromagnetico è basata prevalentemente sulla tecnica Hit-or-Miss, che risulta conveniente anche nella trattazione delle riflessioni. Utilizzando tale tecnica non è necessario seguire le evoluzioni del campo elettrico (anche perché seguirle significherebbe appesantire eccessivamente il programma, sia come tempi di esecuzione, sia come memoria), ma è sufficiente ricavare ad ogni riflessione la *Riflettività* R della superficie interessata e verificare se il fotone viene assorbito o riflesso. La riflettività R è una probabilità ($0 \leq R \leq 1$) che può essere facilmente espressa nella forma:

$$R = P_s \bar{r}_s + P_p \bar{r}_p \quad (\text{B.1})$$

dove P_p e P_s sono le frazioni di polarizzazione rispettivamente p e s ($P_p + P_s = 1$) del versore di polarizzazione \mathbf{j} e \bar{r}_p e \bar{r}_s i relativi coefficienti di riflessione (si ricorda che la polarizzazione p è quella giacente sul piano d'incidenza e s quella perpendicolare ad esso). I coefficienti di riflessione sono stati calcolati nelle (4.6) e (4.16), a seconda che la superficie su cui incide il fotone sia PEEK, quarzo o alluminio. Le frazioni di polarizzazione dipendono invece dalla direzione di incidenza del fotone sulla superficie.

B.1 Vettore di polarizzazione

Iniziamo col definire il vettore di polarizzazione \mathbf{j} ortonormale al vettore di propagazione \mathbf{k} .

Se si considerasse un'onda elettromagnetica invece di singoli fotoni, sarebbe necessario seguire l'evoluzione dei campi elettrici e calcolarne di volta in volta le proiezioni sugli assi coordinati (vedi figura B.1). Oltre a richiedere elevati tempi di esecuzione, il risultato dipenderebbe fortemente dalla scelta del tipo di polarizzazione iniziale e dal fatto che dopo ogni riflessione essa cambia in base agli sfasamenti tra campo incidente e riflesso (vedi appendice A) [67]. A differenti tipi di polarizzazione corrisponderebbero differenti riflettività.

Ad un singolo fotone può essere invece associato un vettore ortonormale, generato isotropicamente, che ne definisce la polarizzazione iniziale e ignorare così il tipo di polarizzazione dell'onda, che è la rappresentazione macroscopica dell'involuppo di tutti i fotoni. Inoltre questo vettore compie un numero di rotazioni al secondo dell'ordine di $\nu = \frac{c}{\lambda} \sim \frac{10^8}{10^{-7}} = 10^{15}$ Hz; poiché il clock del calcolatore ha una frequenza molto inferiore, il vettore di polarizzazione rotante può essere

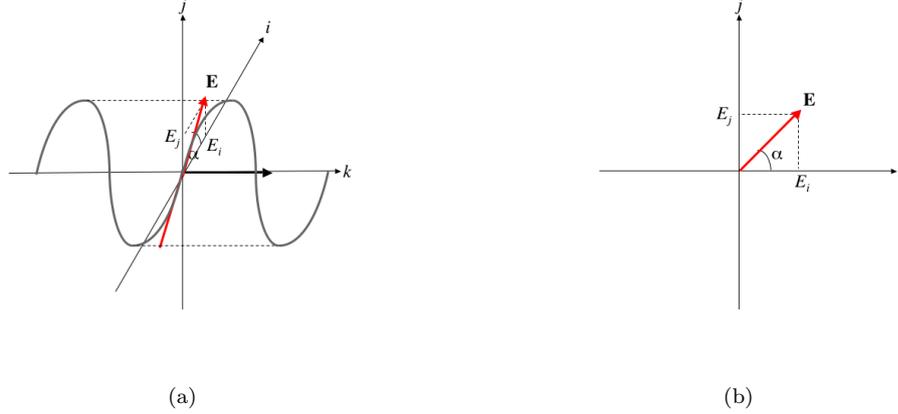


Figura B.1: Rappresentazione grafica dell'onda \mathbf{E} (in grigio) polarizzata linearmente nel sistema di riferimento (i, j, k) ; in rosso il vettore \mathbf{E} proiettato sul piano delle polarizzazioni e in nero il vettore d'onda. In (a) la rappresentazione tridimensionale, in (b) quella nel piano delle polarizzazioni (i, j) .

sostituito con un un vettore medio \mathbf{j} non rotante risolvendo così i problemi precedentemente enunciati nel caso dell'implementazione del campo elettrico.

Questo vettore, che abbiamo chiamato vettore di polarizzazione, è essenziale quando il fotone colpisce una superficie, dato che $P_s = |\mathbf{j}_\perp|^2$ e $P_p = |\mathbf{j}_\parallel|^2$ (\mathbf{j}_\perp e \mathbf{j}_\parallel definiti come in figura 4.1). Il vettore \mathbf{j} verrà tuttavia ruotato ad ogni riflessione e ad ogni diffusione Rayleigh.

B.2 Geometria dello scattering Rayleigh

Prima di discutere il trattamento della riflessione, mostriamo come il vettore di polarizzazione può essere modificato a causa dello scattering Rayleigh. La teoria dello scattering è discussa in dettaglio in [68].

Osservando la figura B.2 si può notare che il vettore d'onda \mathbf{k} viene deviato rispetto alla sua direzione originaria secondo gli angoli θ_R e φ_R . Non essendo presente alcun fenomeno fisico che modifichi la polarizzazione, anche il vettore \mathbf{j} viene ruotato secondo i medesimi angoli. Quindi il modo migliore per eseguire lo scattering Rayleigh è: eseguire una trasformazione di rotazione $\mathcal{R}^T(\theta, \varphi)$ dal sistema assoluto dell'esperimento al sistema di riferimento in figura B.2 in cui \mathbf{k} ha solo la terza componente, ruotarlo in base agli angoli di scattering con $\mathcal{R}(\theta_R, \varphi_R)$ e tornare al sistema di riferimento iniziale con $\mathcal{R}(\theta, \varphi)$. Pertanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_R &= \mathcal{R}(\theta, \varphi)\mathcal{R}(\theta_R, \varphi_R)\mathcal{R}^T(\theta, \varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{j}_R &= \mathcal{R}(\theta, \varphi)\mathcal{R}(\theta_R, \varphi_R)\mathcal{R}^T(\theta, \varphi)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Per costruire la matrice $\mathcal{R}^T(\theta, \varphi)$ è sufficiente moltiplicare una matrice ignota 3×3 per un vettore unitario (descritto dagli angoli polari θ e φ) ed imporre che il risultato sia un vettore allineato con l'asse 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

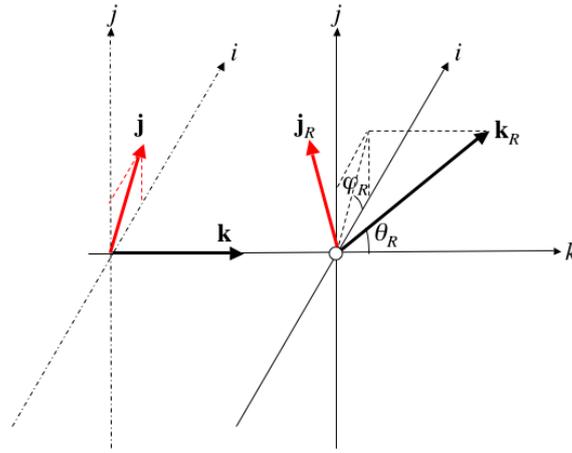


Figura B.2: Scattering Rayleigh. \mathbf{k} e \mathbf{j} sono i vettori d'onda e di polarizzazione prima dello scattering, \mathbf{k}_R e \mathbf{j}_R dopo lo scattering. Sia il vettore \mathbf{k} che il vettore \mathbf{j} vengono ruotati degli angoli θ_R e φ_R .

Risolvendo il sistema che ne deriva e imponendo che $\det \mathcal{R}^T = 1$ e che $\mathcal{R}^T(0,0) = \mathcal{I}$, si ottiene:

$$\mathcal{R}^T(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

le cui righe sono vettori ortonormali fra loro; di conseguenza

$$\mathcal{R}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

La matrice $\mathcal{R}^T(\theta, \varphi)$ ruota un vettore con angoli polari (θ, φ) in modo da formare un vettore con solo la terza componente non nulla, mentre la matrice $\mathcal{R}(\theta', \varphi')$ ruota un vettore con solo la terza componente non nulla in modo da formare un vettore definito dagli angoli polari (θ', φ') . Perciò la matrice $\mathcal{R}(\theta_R, \varphi_R)$ non è altro che la (B.5) con θ_R e φ_R al posto di θ e φ .

B.3 Geometria all'interfaccia

Si esamina adesso la geometria nell'istante in cui il fotone giunge sull'interfaccia.

Utilizziamo il sistema di riferimento e le notazioni mostrate in figura B.3. Le direzioni \mathbf{k} e \mathbf{n} sono rispettivamente quella del vettore d'onda e quella della normale all'interfaccia (definita sempre uscente dalla faccia, cioè orientata verso l'interno del calorimetro, in modo che $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = -1$ per incidenza normale) e insieme definiscono il piano d'incidenza. I vettori \mathbf{j} , \mathbf{j}_{\parallel} ed \mathbf{j}_{\perp} ¹ sono rispettivamente il vettore di polarizzazione e le sue proiezioni p ed s (rispetto al piano d'incidenza, dove giacciono i vettori \mathbf{n} e \mathbf{k}).

¹Da notare che la polarizzazione s è sempre parallela all'asse y se l'onda giace in (x, z) .

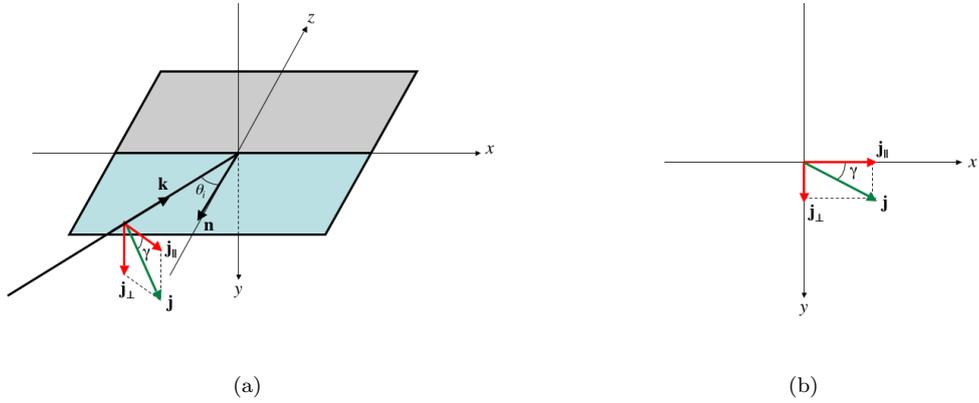


Figura B.3: Rappresentazione delle direzioni \mathbf{k} , \mathbf{n} , \mathbf{j} , \mathbf{j}_{\parallel} e \mathbf{j}_{\perp} . In nero le direzioni che definiscono il piano d'incidenza all'interfaccia tra i due mezzi (\mathbf{k} e \mathbf{n}), in verde la polarizzazione incidente (\mathbf{j}) e in rosso le sue componenti rispetto al piano d'incidenza (\mathbf{j}_{\parallel} e \mathbf{j}_{\perp}). In (a) è mostrata la rappresentazione tridimensionale e in (b) quella sul piano delle polarizzazioni (perpendicolare a \mathbf{k})

Dalla figura B.3(b) si possono definire le proiezioni sul piano d'incidenza come:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_{\parallel} &= \mathbf{j} \cos \gamma \\ \mathbf{j}_{\perp} &= \mathbf{j} \sin \gamma\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

e quindi le frazioni di polarizzazione sono:

$$\begin{aligned}P_p &= |\mathbf{j}_{\parallel}|^2 = \cos^2 \gamma \\ P_s &= |\mathbf{j}_{\perp}|^2 = 1 - P_p\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

Per ricavare $\cos \gamma$ è sufficiente utilizzare il prodotto scalare di due vettori: infatti dati \hat{a} e \hat{b} , $\hat{a} \cdot \hat{b} = \cos \theta_{ab}$ dove θ_{ab} è l'angolo compreso fra \hat{a} e \hat{b} . Dalla figura B.3, si ottengono immediatamente le seguenti relazioni, utili al nostro caso:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = -\cos \theta_i \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{n} = \sin \theta_i \hat{y} \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{y} \times \mathbf{k} = \hat{x}' \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{x}' \cdot \mathbf{j} = \cos \gamma \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (\text{B.12})$$

(\hat{y} e \hat{x}' sono i vettori degli assi y e x' definiti nella figura B.3(b), sui cui giacciono rispettivamente le proiezioni \mathbf{j}_{\perp} e \mathbf{j}_{\parallel}).

Dalla (B.8) ricaviamo $\cos \theta_i$, una delle variabili essenziali del nostro problema, e di conseguenza $\sin \theta_i$. A questo punto dalla (B.9), (B.10) e (B.11), usando la relazione $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, si ricava:



$$\begin{aligned}\cos \gamma &= (\hat{y} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = \left[\frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k})}{\sin \theta_i} \right] \cdot \mathbf{j} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{n} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{k}}{\sin \theta_i} \cdot \mathbf{j} = \frac{\mathbf{n} + \mathbf{k} \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \cdot \mathbf{j} = \\ &= \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}}{\sin \theta_i}\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

dove per le semplificazioni sono state utilizzate la (B.12) e la relazione $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ in quanto \mathbf{k} è un vettore unitario.

Nella (B.13) è presente un problema formale: se l'onda ha incidenza normale ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = -1$) si ha $\sin \theta_i = 0$. Tuttavia, in questo caso, la trattazione è più semplice perché, dato che oltre alla (B.12) vale $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$, il piano d'incidenza può avere una inclinazione γ qualsiasi rispetto al piano su cui giacciono \mathbf{j} e \mathbf{k} . La situazione più conveniente è dunque quella di considerare $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\parallel}$, parallela all'asse x ($\gamma = 0$).

In conclusione le informazioni geometriche necessarie per implementare la *riflessione polarizzata* nel Montecarlo, sono:

$$\begin{aligned}\cos \theta_i &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \\ \cos \gamma &= \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}}{\sin \theta_i}\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

B.4 Geometria della riflessione

Al termine della riflessione i vettori \mathbf{k} e \mathbf{j} devono essere opportunamente ruotati. La matrice generale di rotazione $\mathcal{R}_{\mathbf{u}}(\phi)$ intorno ad un vettore unitario \mathbf{u} di un generico angolo ϕ è:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{u}}(\phi) = \begin{pmatrix} u_x^2 + (1 - u_x^2) \cos \phi & u_x u_y (1 - \cos \phi) - u_z \sin \phi & u_x u_z (1 - \cos \phi) + u_y \sin \phi \\ u_y u_x (1 - \cos \phi) + u_z \sin \phi & u_y^2 + (1 - u_y^2) \cos \phi & u_y u_z (1 - \cos \phi) - u_x \sin \phi \\ u_z u_x (1 - \cos \phi) - u_y \sin \phi & u_z u_y (1 - \cos \phi) + u_x \sin \phi & u_z^2 + (1 - u_z^2) \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Come mostrato in figura B.4 la riflessione ruota i vettori \mathbf{k} e \mathbf{j} di π intorno al vettore \mathbf{n} e cambia verso al vettore \mathbf{k} . Con $\phi = \pi$, la (B.15) diventa semplicemente:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{u}}(\pi) = \mathcal{R}_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 2u_x^2 - 1 & 2u_x u_y & 2u_x u_z \\ 2u_y u_x & 2u_y^2 - 1 & 2u_y u_z \\ 2u_z u_x & 2u_z u_y & 2u_z^2 - 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T - \mathcal{I} \quad (\text{B.16})$$

e applicandola opportunamente a \mathbf{k} e \mathbf{j} , si ottiene:

$$\mathbf{k}_r = -\mathcal{R}_{\mathbf{n}}\mathbf{k} = \mathcal{I}\mathbf{k} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{k} = \mathbf{k} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = \mathbf{k} + 2 \cos \theta_i \mathbf{n} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{j}_r = \mathcal{R}_{\mathbf{n}}\mathbf{j} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{j} - \mathcal{I}\mathbf{j} = 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) - \mathbf{j} \quad (\text{B.18})$$

con \mathbf{k}_r e \mathbf{j}_r i vettori d'onda e di polarizzazione dopo la riflessione, definiti come in figura B.4.

Questa rotazione è corretta nel caso di riflessioni su un conduttore, ma nel caso di un dielettrico le componenti della polarizzazione potrebbero cambiare segno. Nelle equazioni di Fresnel (4.6) i termini $n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t$ e $n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t$ possono assumere valori sia negativi che positivi, entrambi accettabili nelle formule di \bar{r}_s e \bar{r}_p in quanto compaiono al quadrato. Questa ambiguità di segno influenza però il verso delle componenti dei campi riflessi (si veda l'appendice

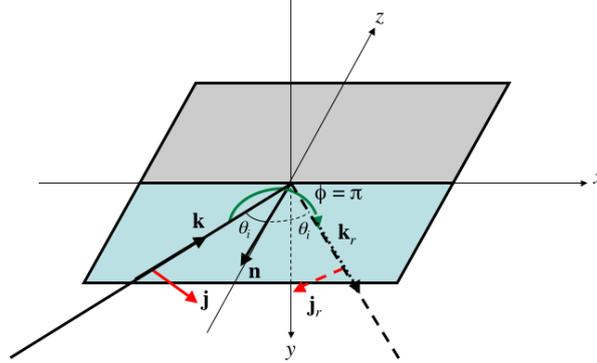


Figura B.4: Geometria della riflessione. In nero i vettori d'onda, in rosso quelli di polarizzazione, in verde l'angolo di rotazione ϕ . Da notare che nei vettori riflessi (linee tratteggiate) \mathbf{k}_r subisce una inversione di direzione oltre alla rotazione, mentre \mathbf{j}_r no.

A per dettagli), per cui, prima di eseguire la rotazione (B.18), occorre ruotare preliminarmente il vettore \mathbf{j} di π intorno ai vettori \hat{x} , per cambiare verso alla polarizzazione s , e \hat{y} , per cambiare verso alla polarizzazione p :

- $n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t > 0$

$$\mathbf{j} = \mathcal{R}_{\hat{x}} \mathbf{j} = 2\hat{x}\hat{x}^T \mathbf{j} - \mathcal{I}\mathbf{j} = 2 \left(\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{n} \times \mathbf{k}}{\sin \theta_i} \right) (\hat{y} \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} - \mathbf{j} = 2(\mathbf{n} + \cos \theta_i \mathbf{k}) \frac{\cos \gamma}{\sin \theta_i} - \mathbf{j} \quad (\text{B.19})$$

- $n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t < 0$

$$\mathbf{j} = \mathcal{R}_{\hat{y}} \mathbf{j} = 2\hat{y}\hat{y}^T \mathbf{j} - \mathcal{I}\mathbf{j} = 2(\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \left[\frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{j}}{\sin \theta_i} \right] - \mathbf{j} \quad (\text{B.20})$$

(per ottenere questi risultati abbiamo usato le (B.8)-(B.13).

B.5 Problema della rugosità delle superfici

Come ultima osservazione segnaliamo il fatto che nel Montecarlo è stata implementata la possibilità di avere una riflessione completamente casuale, dovuta alla rugosità della superficie. Una trattazione microscopica sarebbe troppo complicata da simulare, in quanto sarebbe necessario conoscere la reale forma della superficie, punto per punto. Si può però risolvere il problema statisticamente, in quanto i fotoni che colpiscono le superfici sono in numero molto elevato:

- si parametrizza la probabilità di riflessione casuale da parte di una superficie rugosa con un coefficiente (in linea di principio noto sperimentalmente);
- si assuma che una superficie puramente rugosa rifletta la luce con una distribuzione completamente isotropa.



Quindi per ogni riflessione esisterà una probabilità che il fotone subisca una riflessione casuale invece che una “a specchio” come descritta in questo paragrafo; in quel caso i vettori \mathbf{k} e \mathbf{j} saranno nuovamente generati casualmente, come se fossero appena stati prodotti.



Ringraziamenti

Un grazie a tutto il gruppo MEG. In particolare ai miei relatori Alessandro e Fabrizio. Il primo per le *frustate* e il secondo per la PAZIENZA. Un grazie a Mr. Elli per avermi insegnato parecchie cose (soprattutto l'operatore '?'), Dons per avermi permesso di disturbarlo un po' più del necessario e a Marco per "ok, siediti...parliamo del trigger...". Un grazie ad Angela e le chiacchierate in casa a Untersigghental, non solo per quelle di fisica, ma anche di cucina. Un grazie a Luca e Giovanni per la compagnia, simpatia, gli aiuti e tutto il resto...Un grazie ovviamente anche al mio compagno di schiavitù Francesco e alla sala schiavi (= laureandi) in generale. Un grazie ai membri romani e genovesi di MEG, di cui ometto i nomi per evitare che questi ringraziamenti diventano più lunghi della tesi...

Ovviamente un grazie speciale anche a parenti e amici che mi hanno sopportato in questo periodo devastante chiamato TESI...E che l'avventura continui...

2

²Special Thanks al \footnote di L^AT_EX...



Elenco delle figure

1.1	I possibili diagrammi di Feynmann per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ nello Standard Model.	13
1.2	Diagrammi di Feynman per le correzioni ai termini di massa del bosone di Higgs.	15
1.3	Diagramma di Feynman per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ all'interno dello schema SU(5) SUSY-GUT.	15
1.4	Previsioni sul rapporto di decadimento di $\mu \rightarrow e\gamma$: teoria SU(5) SUSY-GUT.	16
1.5	Previsioni sul rapporto di decadimento di $\mu \rightarrow e\gamma$: teoria SO(10) SUSY-GUT.	16
1.6	Evoluzione nel tempo del limite al 90% di C.L. sul BR $_{\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma}$.	18
1.7	Il segnale $\mu \rightarrow e\gamma$ e i relativi fondi, fisici e accidentali.	19
1.8	Spettro in energia dei fotoni provenienti dal decadimento radiativo $\mu \rightarrow e\nu_e\nu_\mu\gamma$.	19
1.9	Spettri integrali dei fotoni dal valore di soglia all' <i>end-point</i> .	21
1.10	Simulazione dello spettro in energia del fondo di fotoni separato nelle sue componenti.	22
1.11	Intervalli al 90% di CL.	23
2.1	Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale.	25
2.2	Vista tridimensionale dell'apparato con l'indicazione del sistema di riferimento.	26
2.3	Schematizzazione della linea di fascio dell'esperimento e dell'area $\pi E5$.	27
2.4	Flusso di μ e π nella linea di fascio $\pi E5$ in funzione dell'impulso.	27
2.5	Schematizzazione della linea di trasporto dei muoni nell'area $\pi E5$.	28
2.6	Separazione spaziale tra muoni e positroni.	29
2.7	Rappresentazione schematica dello spettrometro di MEG. A destra il piano (x, r) e a sinistra quello (r, z) .	30
2.8	Fotografia di COBRA ed il profilo dell'intensità del campo di COBRA lungo la linea del fascio.	30
2.9	Traiettoria di un positrone emesso a 90° rispetto al fascio nel campo magnetico a gradiente di COBRA e in un campo uniforme.	31
2.10	Curvatura della traiettoria di un positrone all'interno delle camere nel campo magnetico a gradiente di COBRA ed in un campo uniforme.	31
2.11	Risposta dei fotomoltiplicatori al variare dell'intensità e della direzione del campo magnetico e la sua compensazione nella regione del calorimetro.	32
2.12	Schematizzazione di una DC e foto di una di esse.	33
2.13	Pattern di Vernier sui fogli catodici di tre celle a drift.	33
2.14	Schematizzazione del TC e di un sua barra	34
2.15	Risoluzione temporale del Timing Counter in funzione del punto di incidenza sulla barra, in configurazione di singola barra.	35
2.16	Risoluzione temporale del Timing Counter $\sigma_{\Delta T}/\sqrt{2}$ in funzione del numero di barra durante la presa dati 2008 e 2009.	35
2.17	Rappresentazione pittorica del calorimetro a Xenon liquido.	36



2.18	Mapa della collocazione dei fototubi.	37
2.19	Rappresentazione schematica del <i>Large Prototype</i>	38
2.20	Sezione d'urto (cm ²) di assorbimento per O ₂ ed H ₂ O.	40
2.21	Lunghezza di assorbimento λ_{abs} (cm) dello LXe contaminato con 1 ppm di O ₂ ed H ₂ O.	40
2.22	Sorgente di Americio inserita su un filo di diametro $\sim 100 \mu\text{m}$	42
2.23	Acceleratore C-W.	43
2.24	Schema della disposizione del calorimetro NaI.	45
2.25	Trigger MEG: schema della catena elettronica e livelli in cui è organizzato.	46
2.26	Logica del trigger e i suoi tempi di latenza.	47
2.27	Schema del sistema di acquisizione dati.	48
2.28	Schema del DRS: suo funzionamento e flusso di dati.	49
3.1	Illustrazione schematica del tempo generazione-arrivo del fotone.	54
3.2	Ricostruzione dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX: XET.	55
3.3	Ricostruzione dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX: LF.	57
3.4	Ricostruzione dei fotoni simulati da 55 MeV.	58
3.5	Distribuzione delle cariche faccia per faccia: <i>modello firenze</i>	59
3.6	Distribuzione delle cariche faccia per faccia: <i>modello firenze</i> moltiplicato.	61
4.1	Geometria della riflessione polarizzata.	63
4.2	Indici di rifrazione dello Xenon liquido e del quarzo in funzione della lunghezza d'onda nella regione VUV.	65
4.3	Costante dielettrica dell'alluminio calcolata secondo Drude-Lorentz.	66
4.4	Andamento di \bar{r}_s e \bar{r}_p	69
5.1	Distribuzione delle cariche faccia per faccia: <i>riflessione polarizzata</i>	72
5.2	Fit per l'estrazione delle QE senza la riflessione polarizzata.	73
5.3	Fit per l'estrazione delle QE con la riflessione polarizzata.	74
5.4	Lo schema della configurazione geometrica PMT-sorgente.	74
5.5	Distribuzione delle cariche faccia per faccia: riflessione polarizzata e nuovo set di QE.	75
5.6	Distribuzione delle cariche faccia per faccia: riflessione polarizzata nuovo set di QE e n_{PEEK} modificato.	76
5.7	Ricostruzione tramite LF dei fotoni di calibrazione a 55 MeV della reazione CEX: LF dopo l'introduzione della riflessione polarizzata.	77
6.1	Definizione della <i>Blinding Box</i> e delle <i>sideband</i> dei dati dell'esperimento MEG.	79
6.2	Distribuzione degli eventi nelle <i>Sideband</i>	82
6.3	Fit delle PDF	83
6.4	Distribuzione degli eventi dopo l' <i>Unblinding</i>	83
A.1	Sistema di riferimento usato.	88
A.2	Onda omogenea polarizzata <i>s</i> ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia.	90
A.3	Onda disomogenea polarizzata <i>s</i> ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia.	91
A.4	Onda omogenea polarizzata <i>p</i> ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia.	92
A.5	Onda disomogenea polarizzata <i>p</i> ad incidenza perpendicolare sull'interfaccia.	93
A.6	Geometria di un'onda ad incidenza qualsiasi.	94
A.7	Onda polarizzata <i>s</i> ad incidenza θ_i	96
A.8	Onda polarizzata <i>p</i> ad incidenza θ_i	98



A.9	Geometria dei flussi di energia incidente e riflessa.	99
B.1	Rappresentazione grafica dell'onda \mathbf{E} polarizzata linearmente nel sistema di riferimento (i, j, k)	102
B.2	Scattering Rayleigh.	103
B.3	Rappresentazione delle direzioni \mathbf{k} , \mathbf{n} , \mathbf{j} , \mathbf{j}_{\parallel} e \mathbf{j}_{\perp}	104
B.4	Geometria della riflessione.	106

Elenco delle tabelle

1.1	Schema riassuntivo delle grandezze caratteristiche delle interazioni fondamentali nel SM	11
1.2	Canali del decadimento del μ^+	11
1.3	Particelle del SM e rispettive particelle SUSY nell'estensione minimale Supersimmetrica del Modello Standard (SSMM)	15
1.4	Limiti per il rapporto di decadimento di processi di LFV con muoni.	17
1.5	Evoluzione nel tempo delle risoluzioni (FWHM) e del limite sul $BR_{\mu^+ \rightarrow e+\gamma}$	18
2.1	Proprietà della linea di fascio $\pi E5$	28
2.2	Caratteristiche principali dello Xenon	41
2.3	Reazioni utilizzate con il C-W e rispettive linee di emissione.	44
6.1	Tabella riassuntiva dei metodi di determinazione delle PDF.	81
6.2	Risultati preliminari dell'analisi di MEG per i dati 2009.	82

Bibliografia

- [1] F. Halzen and A.D. Martin, “Quarks & Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics”, John Wiley & Sons (1984).
- [2] W.-M. Yao et al., “Review of Particle Physics (RPP)”, Journal of Physics **G33**, (2006), 1. Available at <http://pdg.lbl.gov>
- [3] KamLAND collaboration, “Measurement of Neutrino Oscillation with KamLAND: Evidence of Spectral Distortion”, Phys. Rev. Lett. **94**, (2005), 081801.
KamLAND collaboration, “Precision Measurement of Neutrino Oscillation Parameters with KamLAND”, Phys. Rev. Lett **100**, (2008), 221803, [arXiv:hep-ex/0801.4589v2].
- [4] M. H. Ahn et al. [K2K Collaboration], “Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment”, Phys. Rev. **D74**, (2006), 072003, [arXiv:hep-ex/0606032].
- [5] J. Hosaka et al. [SuperKamiokande Collaboration], “Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I”, Phys. Rev. **D73**, (2006), 112001.
- [6] Q.R. Ahmad et al. [SNO Collaboration], “Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory”, Phys. Rev. Lett. **89**, (2002), 011301.
- [7] S. Wanninger et al. [GALLEX Collaboration], “Probing Neutrino Vacuum Oscillations with the GALLEX Solar Neutrino Results”, Phys. Rev. Lett. **83**, (1999), 1088.
- [8] [Borexino collaboration], “First real time detection of Be7 solar neutrinos by Borexino”, Phys. Lett. **B658**, (2008), 101-108, [arXiv:astro-ph/0708.2251v2].
- [9] J. Hosaka et al. [SuperKamiokande Collaboration], “Three flavor neutrino oscillation analysis of atmospheric neutrinos in Super-Kamiokande”, Phys. Rev. **D74**, (2006), 032002, [arXiv:hep-ex/0604011v2].
- [10] [MACRO Collaboration], “Atmospheric neutrino oscillations from upward throughgoing muon multiple scattering in MACRO”, Phys. Lett. **B566**, (2003), 35.
- [11] [Soudan 2 Collaboration], “Observation of Atmospheric Neutrino Oscillations in Soudan 2”, Phys. Rev. **D68**, (2003), 113004.
- [12] N. Agafonova et Al. [OPERA Collaboration], “Observation of a first ν_τ candidate in the OPERA experiment in the CNGS beam”, Phys. Rev. Lett. **B691**, (2010), 138-145.
- [13] F. Böhm and P. Vogel, “Physics of massive neutrinos”, Cambridge University Press (1992).



- [14] R. N. Mohapatra, “Unification and Supersymmetry”, 3rd edition, Springer-Verlag, New York (2003).
- [15] R. Barbieri and L. J. Hall, “Signals For Supersymmetric Unification”, Phys. Lett. **B338**, (1994), 212-218, [arXiv:hep-ph/9408406v1].
R. Barbieri, L. Hall and A. Strumia, “Violations of lepton flavour and CP in supersymmetric unified theories”, Nucl. Phys. **B445**, (1995), 219-251, [arXiv:hep-ph/9501334v1].
- [16] J. Hisano and D. Nomura, “Solar and atmospheric neutrino oscillations and lepton flavor violation in supersymmetric models with right-handed neutrinos”, Phys. Rev. **D59**, (1999), 116005.
- [17] L. J. Hall, V. A. Kostelecky and S. Raby, “New flavor violations in supergravity models”, Nucl. Phys. **B267**, (1986), 415.
- [18] E. Kh. Akhmedov, G. C. Branco and M. N. Rebelo, “Seesaw mechanism and structure of neutrino mass matrix”, Phys. Lett. **B478**, (2000), 215-223, [arXiv:hep-ph/9911364].
- [19] A. Badertscher, D. Renker and L. Simons, PSI internal report (1989), “PSI User’s Guide, Accelerator Facilities”.
- [20] M.L. Brooks et al. [MEGA Collaboration], “New limit for the family-number non-conserving decay $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, Phys. Rev. Lett. **83**, (1999), 1521, [arXiv:hep-ex/9905013].
- [21] M. Ahmed et al., “Search for the lepton-family-number non-conserving decay $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, Phys. Rev. **D65**, (2002), 112002, [arXiv:hep-ex/0111030].
- [22] U. Bellgardt et al., “Search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^-e^+$ ” Nucl. Phys. **B299**, (1988), 1.
- [23] A. Van der Schaaf [Sindrum II Collaboration], “ μe conversion experiments”, Workshop, Proc. **NOON2003** for the Kanazawa, (2003).
- [24] L. Willmann et al., “New Bounds from a Search for Muonium to Antimuonium Conversion”, Phys. Rev. Lett. **82**, (1999), 49.
- [25] Y. Kuno and Y. Okada, “Muon decay and physics beyond the standard model”, Rev. Mod. Phys. **73**, (2001), 151.
- [26] P. Depommier et al., “New Limit on the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, Phys. Rev. Lett. **39**, (1977), 1113.
- [27] A. Van der Schaaf et al., “A search for the decay $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, Nucl. Phys. **A340**, (1980), 249.
- [28] W.W. Kinnison et al., “Search for $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ ”, Phys. Rev. **D25**, (1982), 2846.
- [29] R.D. Bolton et al., “Search for rare muon decays with the Crystal Box detector”, Phys. Rev. **D38**, (1988), 2077.
- [30] A. Baldini et al., “The MEG experiment: search for the $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ decay at PSI”, September 2002. Available at http://meg.psi.ch/docs/prop_infn/nproposal.ps.gz
- [31] Y. Kuno, A. Maki and Y. Okada, “Background estimation and suppression with polarized muons”, MEG Technical Note 1, (1997).



- [32] G. Feldman and R. Cousins, “Unified approach to the classical statistical analysis of small signals”, *Phys. Rev.* **D57**, (1998), 3873, [arXiv:physics/9711021v2].
- [33] P.R. Kettle, “Beam Line & Setup Considerations for the MEG Large Prototype LXe Calorimeter Test in $\pi E1$ ”, MEG Technical Note 21, (2003). Available at <http://meg.web.psi.ch/docs/>
- [34] A. Baldini et al., [MEG Collaboration], “Test measurements for the MEG drift chambers”, PSI Annual Report, (2003). Available at <http://meg.psi.ch/docs/index.html>
- [35] F. Gatti, “Timing Counter Status”, Talk from Review Meetings, (Feb. 14th, 2007). Available at <http://meg.psi.ch/docs/index.html>
- [36] T. Doke and K. Masuda, “Present status of liquid rare gas scintillation detectors and their new application to gamma-ray calorimeters”, *Nucl. Instr. and Meth.* **A420**, (1999), 62.
- [37] HAMAMATSU Photonics, <http://www.hamamatsu.com>
- [38] A. Baldini et al., “Simulation of the Liquid Xenon Calorimeter Behaviour”, MEG Technical Note 18, (2001). Available at <http://ieeexplore.ieee.org/iel5/94/34709/01657967.pdf>
- [39] G. Signorelli, “A sensitive search for lepton-flavour violation: the MEG experiment and the new LXe calorimetry”, Ph.D. Thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa (2004). Available at <http://meg.web.psi.ch/docs/theses/index.html#master>
- [40] A. Papa, “Misura del fotone di decadimento nell’esperimento $\mu \rightarrow e + \gamma$ mediante la nuova calorimetria a Xenon liquido”, Tesi di laurea, Università di Pisa (2004). Available at <http://meg.web.psi.ch/docs/theses/index.html#master>
- [41] A. Baldini et al., “Liquid Xenon Scintillation Calorimetry and Xe Optical Properties”, *IEEE Trans. Die.* **13**, (2006), 547.
- [42] K. Watanabe and M. Zelikoff, “Absorption coefficients of water vapor in the vacuum ultraviolet”, *J. Opt. Soc. Am.* **43**, (1953), 753.
K. Watanabe, E. Inn and M. Zelikoff, “Absorption coefficients of oxygen in the vacuum ultraviolet”, *J. Chem. Phys.* **21**, (1953), 1026.
- [43] A. Baldini, C. Bemporad, F. Cei, M. Grassi, D. Nicolò, A. Papa, R. Pazzi, G. Signorelli, “Considerations on the Calibration and Monitoring of the MEG experiment”, MEG Tech. Note **27**, (2005).
- [44] S. Ritt, “The DRS2 chip: a 4.5 GHz waveform digitizing chip for the MEG experiment”, Nuclear Science Symposium Conference Record, 2004 IEEE. Available at http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1462369
- [45] G. Gallucci, “Studio delle prestazioni del calorimetro elettromagnetico dell’esperimento MEG per la ricerca del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ ”, Tesi di laurea, Università di Pisa (2006). Available at <http://meg.web.psi.ch/docs/theses/index.html#master>
- [46] H. Wind, “Principal Component Analysis”, European Organization for Nuclear Research EP Internal Report **81-12/Rev. 1** August 1981.
- [47] M. Bellini, “Impulsi laser raggi X”, *Le Scienze* **383** (Luglio 2000).



- [48] Measurements by M. Bellini, Firenze's LENS lab. Measurements are taken from private communication with G. Signorelli (unpublished).
- [49] G. S. Sabine, "Reflectivities of evaporated metal films in the near and far ultraviolet", *Phys. Rev.* Volume **55**, (1939), 1064.
- [50] Lide, D.R. (ed.). "CRC Handbook of Chemistry and Physics." 76th ed. Boca Raton, FL: CRC Press Inc., (1995-1996).
Available at http://www.pd.infn.it/~conti/images/LXe/xe_properties.txt
- [51] R. E. Glick (1961). "On the Diamagnetic Susceptibility of Gases", *J. Phys. Chem.* **65**, 1552-1555.
- [52] Plastotecnica Emiliana S.r.l., http://www.plastotecnicaemiliana.it/plasto/index.php?option=com_content&task=view&id=24&Itemid=44
- [53] National Scientific Company, "Clear Fused Quartz Tubing & Rod", <http://www.quartz.com/gedata.html>
- [54] J. A. Stratton, "Electromagnetic theory", Appendix III, pag. 606-607, McGraw-Hill Book Company (1941).
- [55] Sellmeier equation fitted to measurements in 2005 by S. Nakamura et.al., Yokohama/KEK. The Sellmeier coefficients are taken from communication with S. Nakamura, Yokohama National University, and T. Haruyama, KEK (unpublished).
- [56] Equation fitted to measurements by Tokyo University taken from private communication (unpublished).
- [57] R. Clarke, "Magnetic properties of materials", surrey.ac.uk.
Available at <http://info.ee.surrey.ac.uk/Workshop/advice/coils/mu/#diamag>
- [58] Voltimum Italia S.r.l., <http://www.voltimum.it/news/4552/s/Valori-di-resistivit-di-conduttivit-e-coefficienti-di-temperatura-a-20-gradi-per-i-print.html>
- [59] Matlab Central, "Drude-Lorentz and Debye-Lorentz models for the dielectric constant of metals and water", <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18040-drude-lorentz-and-debye-lorentz-models-for-the-dielectric-constant-of-metals-and->
- [60] B. Ung and Y. Sheng, "Interference of surface waves in a metallic nanoslit", *Optics Express* Vol. **15**, (2007), 1182-1190.
- [61] Rakic et al., "Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices", *Applied Optics* Vol. **37**, (1998), 5271-5283.
- [62] J. E. K. Laurens and K. E. Oughstun, "Electromagnetic impulse, response of triply distilled water", *Ultra-Wideband / Short-Pulse Electromagnetics* (1999).
- [63] TexLoc, "PEEK detailed properties (PolyEtherEtherKetone)", http://www.texloc.com/closet/cl_peek_properties.htm
- [64] A. Baldini, "Rare K-meson and lepton decay", ICHEP 2010 Paris, France, (22-28/July/2010).
Available at <http://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=98&sessionId=13&resId=1&materialId=slides&confId=73513>



-
- [65] A. I. Mahan, "Reflection and refraction at oblique incidence on a dielectric-metallic interface as a boundary value problem in electromagnetic theory", *Journal of the Optical Society of America* **44**, (1956), 913-926.
- [66] W. König, "Elektromagnetische Lichttheorie", *Handbuch der Physik* (Redigiert von H. Koenen) Band **XX**, kapitel 6, p. 141-262, Julius Springer (1928).
- [67] J. A. Stratton, "Electromagnetic theory", Chapter IX, p. 482-511, McGraw-Hill Book Company (1941).
- [68] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Chapter 14, p. 679-683, John Wiley & Sons (1975).

IN SUPREMAE



13