



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Laurea Magistrale in Fisica

Ricerca del Majorone nei decadimenti del muone con l'esperimento MEG

Anno accademico 2010/2011

Candidato: Emanuele Ripiccini

Relatore interno: Dr. Gianluca Cavoto

Relatore esterno: Dr. Francesco Renga (Paul Scherrer Institut)

Al Prof. Roberto Iantorno

Indice

Introduzione	1
1 Motivazioni teoriche	2
1.1 Il Modello Standard	2
1.2 Interazioni del muone nel Modello Standard	5
1.3 Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$	6
1.3.1 Modifiche introdotte dall'oscillazione di neutrino	6
1.3.2 Teorie SUSY/GUT	7
1.4 Il Majorone e la rottura spontanea della R-Parità	10
1.5 Il decadimento $\mu \rightarrow eJ$	11
1.6 Il decadimento $\mu \rightarrow eJ\gamma$	13
1.7 Limiti attuali sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$	14
2 L'esperimento MEG	16
2.1 La Linea di fascio e il bersaglio	17
2.2 Lo spettrometro	19
2.2.1 Il magnete COBRA	19
2.2.2 Il sistema di camere a deriva	21
2.3 Il Timing Counter	22
2.4 Il Rivelatore di fotoni	23
2.4.1 Scintillazione nello Xenon Liquido	24
2.4.2 Caratteristiche del calorimetro a Xenon Liquido	25
2.4.3 Calibrazioni del calorimetro a Xenon liquido	25
2.5 Trigger e DAQ	25
2.5.1 Il sistema di trigger	26
2.5.2 Il DAQ	26
3 Ricerca del Majorone in MEG	28
3.1 Segnale e fondo	28
3.2 Il modello	29

3.2.1	Spettro teorico del positrone di Michel	29
3.2.2	Effetti di accettazione e risoluzione in energia	30
3.3	Test del modello	32
3.4	Campione di dati	35
3.4.1	Selezione degli eventi	35
3.4.2	Stima del fondo atteso	36
3.5	Normalizzazione	38
4	Stima dei parametri del modello	40
4.1	Studio dei parametri di accettazione in energia	40
4.1.1	Accettazione in energia ricavata dal Monte Carlo	40
4.1.2	Metodo Bayesiano	41
4.2	Accettazione angolare	43
4.2.1	Accettazione del rivelatore utilizzando lo scattering Mott	45
4.2.2	Accettazione di trigger	46
4.2.3	Determinazione dell'accettazione angolare	47
4.3	Studio dei parametri della funzione di risoluzione in energia	48
4.3.1	Simulazione Monte Carlo	49
5	Stima della sensibilità al $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$	51
5.1	Limite superiore medio atteso sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$: procedura	51
5.2	Strategia di fit	52
5.3	Cross check e sistematiche	54
5.3.1	Sistematiche sul fattore di normalizzazione	54
5.3.2	Sistematiche sul valore di N_{sig}	56
5.3.3	Studio dei parametri di risoluzione in funzione di θ e ϕ	57
5.3.4	Controllo della linearità dell'analisi dai toy Monte Carlo	59
5.4	Limite superiore atteso sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$	60
	Conclusioni	65
	Appendice A	67
	Appendice B	74
	Appendice C	78
	Ringraziamenti	80

Introduzione

L'esperimento MEG ricerca il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ con una sensibilità di progetto di 10^{-13} sul Branching Ratio. Attualmente MEG è in presa dati presso il Paul Scherrer Institut, dove è disponibile il fascio di muoni continuo più intenso al mondo.

Il Majorone (J) è un bosone di Goldstone che appare nello stato finale, quando la simmetria R-Parità, introdotta in supersimmetria al fine di garantire la conservazione del numero leptonico e del numero barionico, è rotta spontaneamente secondo il teorema di Goldstone. Tale teorema afferma che, quando una simmetria continua è rotta spontaneamente, nuove particelle scalari senza massa (o con massa molto piccola, se la simmetria non è esatta) compaiono nello spettro delle possibili eccitazioni. Esiste una particella scalare, chiamata bosone di Goldstone, per ogni generatore della simmetria che è rotta.

Il decadimento $\mu \rightarrow eJ$, come il $\mu \rightarrow e\gamma$, è vietato dal Modello Standard dal momento che non conserva il sapore leptonico. L'oscillazione di neutrino, introducendo la massa per i neutrini, permette la violazione del sapore leptonico nel canale del decadimento del muone, ma con branching ratio talmente bassi da rendere la misura impensabile (10^{-55} per il canale $\mu \rightarrow e\gamma$). Teorie Supersimmetriche prevedono invece il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ con un branching ratio (BR) molto vicino alla sensibilità di MEG.

La grande abbondanza di decadimenti di muoni a riposo ha portato a chiedersi se fosse possibile la ricerca del Majorone (J) nei dati di MEG. In questa tesi pertanto discuterò la fattibilità di questa ricerca nel canale $\mu \rightarrow eJ$, stimando la sensibilità dell'esperimento al $BR(\mu \rightarrow eJ)$.

Nel primo capitolo presenterò un'introduzione teorica, partendo dal Modello Standard per poi arrivare a descrivere gli scenari in cui compare il Majorone, avendo prima accennato al problema della violazione del sapore leptonico e al decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$.

Nel secondo capitolo descriverò l'apparato sperimentale dell'esperimento MEG in tutti i suoi componenti.

Nel terzo capitolo definirò la strategia di analisi, sviluppando e testando un modello dello spettro in energia del positrone. Inoltre definirò il campione di dati da analizzare e il fattore di normalizzazione per estrarre il valore del $BR(\mu \rightarrow eJ)$.

Il quarto capitolo è dedicato allo studio dei parametri del modello descritto nel terzo capitolo. Questo studio è necessario per avere una conoscenza profonda dello spettro in energia del positrone, requisito indispensabile per questa analisi.

Nel quinto capitolo definirò un metodo, basato su un approccio Bayesiano, per dare una stima della sensibilità al $BR(\mu \rightarrow eJ)$, individuando anche i principali errori sistematici da cui potrebbe essere affetta la misura.

Capitolo 1

Motivazioni teoriche

Ad oggi il Modello Standard (MS) è la teoria che meglio descrive le interazioni fondamentali tra le particelle conosciute. Nel Modello Standard il sapore leptonico è conservato, quindi il branching ratio del decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ e del decadimento $\mu \rightarrow eJ$, dove J è un Majorone, è uguale a zero. L'introduzione della teoria dell'oscillazione di neutrino, che prevede la violazione di sapore leptonico nel settore neutro, permette il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ seppur con un branching ratio bassissima. L'estensione supersimmetrica del Modello Standard, introducendo nuove particelle, permette il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ con un branching ratio vicino alla sensibilità di MEG.

Il Majorone compare invece solo in teorie supersimmetriche, in particolare come conseguenza della rottura spontanea della R-Parità.

1.1 Il Modello Standard

Il Modello Standard è una teoria di gauge di quark e leptoni basata sulla simmetria $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, che descrive tre delle interazioni fondamentali: l'interazione forte, debole e elettromagnetica. Quark e leptoni sono classificati in tre famiglie.

I leptoni si dividono in tre particelle massive con carica elettrica -1 e tre particelle non massive neutre, i neutrini. Ad ogni leptone carico è associato un neutrino:

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Questi rappresentano dei doppietti di isospin debole, ad ognuno dei quali è associato un determinato sapore leptonico.

I quark sono suddivisi invece in tre particelle massive di sapore up, con carica elettrica $+\frac{2}{3}$, e tre particelle massive di sapore down, con carica elettrica $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Ognuno di questi doppietti identifica una famiglia. Sia quark che leptoni hanno spin $\frac{1}{2}$.

Nel Modello Standard i campi di materia sono descritte da campi fermionici di leptoni e quark (Tabella 1.1 e 1.2), mentre le interazioni da campi bosonici (o di gauge) e dal campo di Higgs. Alle simmetrie $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$ sono associati i rispettivi campi di gauge G_μ, W_μ^i e B_μ . Il bosone di Higgs è invece un doppietto di isospin $H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$ (Tabella 1.3).

particella	elettrone	neutrino e	muone	neutrino μ	tau	neutrino τ
campo	e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ
carica elettrica	-1	0	-1	0	-1	0
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
massa	0.511 MeV	0(?)	105.66 MeV	0(?)	1776.82 MeV	0(?)

Tabella 1.1: Leptoni

particella	quark up	quark down	quark charm	quark strange	quark top	quark bottom
campo	u	d	c	s	t	b
carica elettrica	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
massa	2.49 MeV	5.05 MeV	1.27 GeV	101 MeV	172 GeV	4.19 GeV

Table 1.2: quark

particella	Gluone	Fotone	Bosone W	Bosone Z	Bosone di Higgs
campo	G_μ	A_μ	$W_\mu^\pm$	Z_μ	$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$
carica elettrica	0	0	± 1	0	0
spin	0	1	1	1	0
massa	0	0	80.4 GeV	91.2 GeV	>114.4 GeV

Tabella 1.3: Campi di forza

I campi fermionici possono essere proiettati nelle loro componenti di chiralità right (R) e left (L), attraverso i proiettori $P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$ e $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$, in questo modo possiamo riscrivere:

$$q_{iL} = \begin{pmatrix} u_{iL} \\ d_{iL} \end{pmatrix}, l_{iL} = \begin{pmatrix} e_{iL} \\ \nu_{iL} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

A questo punto scriviamo la lagrangiana del Modello Standard:

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}. \quad (1.4)$$

La lagrangiana di gauge si scrive esplicitamente in questa forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = \sum_{SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y} F_{\mu\nu}^{(i)} F^{(i)\mu\nu} + \sum_{\text{quarks, leptoni}} i\bar{\psi}_{iL(R)} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{iL(R)} + |\mathcal{D}_\mu H|^2 + h.c. \quad (1.5)$$

Con $F_{\mu\nu}^{(i)}$ indichiamo il tensore del campo di gauge i -esimo, $\psi_{iL(R)}$ è il campo fermionico i -esimo e $\mathcal{D}_\mu$ la derivata covariante definita come $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_s \frac{\lambda^j}{2} G_\mu^j + ig \frac{\tau^i}{2} A_\mu^i + ig' Q_Y B_\mu$.

g_s, g e g' sono le costanti di accoppiamento rispettivamente per $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, le λ^j ($j = 1 - 8$) sono le matrici di Gell-Mann, mentre le τ^i ($i = 1 - 3$) sono le matrici di Pauli.

La lagrangiana di Higgs è scritta nella forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = -(-\mu^2 |H|^2 + \lambda |H|^4). \quad (1.6)$$

Per $\mu^2 > 0$ il campo di Higgs nel vuoto ha il seguente valore di aspettazione:

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

dove $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \simeq 246 \text{ GeV}$. La massa fisica dell'Higgs è data da $m_H = \sqrt{2\lambda}v$. Dopo la rottura spontanea della simmetria di gauge si viene a formare una particella a massa nulla, il fotone e due bosone massivi $W^\pm$ e Z^0 . Le loro masse sono date da: $m_W = \frac{1}{2}gv$ e $m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}v$, mentre i gluoni rimangono a massa nulla.

La lagrangiana di Yukawa si scrive nella forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = (y_e)_{ij} H^\dagger \bar{e}_{iR} l_{jL} + (y_d)_{ij} H^\dagger \bar{d}_{iR} q_{jL} + (y_u)_{ij} \tilde{H}^\dagger \bar{u}_{iR} q_{jL} + h.c., \quad (1.8)$$

dove le $(y_e)_{ij}$, $(y_d)_{ij}$ e $(y_u)_{ij}$ sono rispettivamente gli accoppiamenti di Yukawa per il leptoni carichi, per i quark di tipo down e per i quark di tipo up e $\tilde{H} = i\tau_2 H^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}$.

Sostituendo il valore di aspettazione nel vuoto del campo di Higgs otteniamo la lagrangiana di massa per i fermioni:

$$\mathcal{L}_{\text{Mass}} = -(\bar{e}_{iR}(m_e)_{ij} e_{jL} + \bar{d}_{iR}(m_d)_{ij} d_{jL} + \bar{u}_{iR}(m_u)_{ij} u_{jL}) + h.c., \quad (1.9)$$

dove $(m_e)_{ij} = \frac{-(y_e)_{ij}}{v/\sqrt{2}}$, $(m_d)_{ij} = \frac{-(y_d)_{ij}}{v/\sqrt{2}}$ e $(m_u)_{ij} = \frac{-(y_u)_{ij}}{v/\sqrt{2}}$ sono le matrici di massa.

Ognuna di queste matrici di massa viene diagonalizzata da trasformazioni unitarie per i campi right e left. In generale per i quark queste matrici sono differenti a seconda che siano right o left, è quindi permesso il mixing dei sapori. La lagrangiana di interazione debole carica si scrive:

$$\mathcal{L}_{W\bar{q}q} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{iL}\gamma^\mu(V_{CKM})_{ij}d_{jL}W_\mu^+ + \bar{d}_{iL}\gamma^\mu(V_{CKM})_{ij}^*u_{jL}W_\mu^-), \quad (1.10)$$

dove V_{CKM} rappresenta la matrice di mixing di sapore nel settore dei quark, denominata matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.

Le matrici di massa dei leptoni si presentano invece totalmente diagonalizzate, quindi scriviamo:

$$\mathcal{L}_{W\bar{\nu}q} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_{iL}\gamma^\mu e_{iL}W_\mu^+ + \bar{e}_{iL}\gamma^\mu u_{iL}W_\mu^-). \quad (1.11)$$

In questa base ad ogni famiglia leptonica è assegnato un sapore. Non essendoci evidenze sperimentali del neutrino right, il neutrino non prende massa attraverso il meccanismo di Higgs. Nelle interazioni il numero leptonico di sapore, L_e , L_μ e L_τ , totale si conserva.

1.2 Interazioni del muone nel Modello Standard

Nel Modello Standard il muone interagisce elettromagneticamente e debolmente accoppiandosi con il fotone e i bosoni W e Z e acquista massa accoppiandosi con il campo di Higgs.

Di seguito la lagrangiana che descrive queste interazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & e\bar{\mu}\gamma^\mu\mu A_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_{\mu L}\gamma^\mu\mu_L W_\mu^+ + \bar{\mu}_L\gamma^\mu\nu_{\mu L}W_\mu^-) - \sqrt{g^2 + g'^2}(\bar{\mu}_L\gamma^\mu(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W)\mu_L \\ & + \bar{\mu}_R\gamma^\mu\sin^2\theta_W\mu_R)Z_\mu^0 - \frac{m_\mu}{v}\bar{\mu}\mu H, \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove θ_W è l'angolo di Weinberg definito dalla formula $\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$, mentre e è la carica dell'elettrone $e = g \sin\theta_W$.

Anni prima della formulazione dell'unificazione elettrodebole ad opera di Glashow Weinberg e Salam, Enrico Fermi era giunto alla formulazione di una teoria effettiva che descriveva il decadimento del muone, attraverso la seguente lagrangiana di interazione che porta il suo nome:

$$\mathcal{L}_{Fermi} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1 - \gamma^5)\mu\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_e + \bar{\nu}_e\gamma^\mu(1 - \gamma^5)e\bar{\mu}\gamma_\mu(1 - \gamma^5)\nu_\mu], \quad (1.13)$$

dove G_F è la costante di Fermi definita come $G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}m_W^2}$. La vita media del muone è $\tau_\mu = 2.19703(4)\times 10^{-6}s$.

Questa lagrangiana descrive il decadimento normale del muone $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$ e $\mu^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ (decadimento di Michel). Se non misuriano la polarizzazione del positrone nello stato finale, il BR differenziale di questo decadimento è:

$$\frac{d^2\Gamma(\mu^\pm \rightarrow e^\pm\nu\bar{\nu})}{dx d\cos\theta_e} = \frac{m_\mu^5 G_F^2}{192\pi^3} x^2 [(3 - 2x) \pm P_\mu \cos\theta_e(2x - 1)], \quad (1.14)$$

con $x = E_e \frac{2m_\mu}{(m_\mu^2 + m_e^2)}$, θ_e è l'angolo tra l'asse su cui giace il vettore di polarizzazione del muone e la direzione dell'impulso del positrone. Lo spettro in energia è rappresentato in Figura 1.1 con diverse distribuzioni angolari.

Un altro canale di decadimento è il decadimento radiativo, un decadimento di Michel con un fotone nello stato finale, $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e\gamma$. Questo decadimento ha un BR=1.4% quando $E_\gamma > 10MeV$. E' stato osservato anche un terzo canale $\mu^+ \rightarrow e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e e^+e^-$ con un $BR = 3.4 \cdot 10^{-5}$.

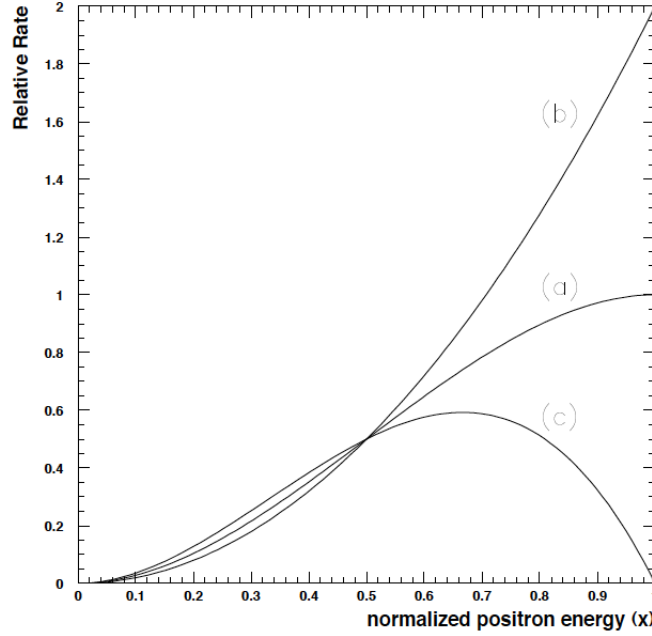


Figure 1.1: Spettro del positrone di Michel per muoni totalmente polarizzati ($P_\mu = 1$). (a) $\cos \theta_e = 0$, (b) $\cos \theta_e = 1$, (c) $\cos \theta_e = -1$ [1]

1.3 Il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$

1.3.1 Modifiche introdotte dall'oscillazione di neutrino

Sebbene il Modello Standard minimale preveda neutrini a massa nulla, ci sono delle forti evidenze di oscillazione di sapore che portano necessariamente alla introduzione nella lagrangiana di un termine di massa non nullo per i neutrini.

L'oscillazione di neutrino si manifesta in due forme: apparizione neutrino appartenente a una famiglia diversa da quella dello stato iniziale e deficit del flusso di neutrini. Gli esperimenti che hanno osservato questo fenomeno hanno utilizzato diverse sorgenti del flusso di neutrini: neutrini provenienti dal sole, neutrini provenienti dal cosmo e neutrini provenienti da reattore nucleare o acceleratore di particelle. I parametri della teoria sono i seguenti:

- $\Delta m_{23}^2 = m_2^2 - m_3^2$, differenza delle masse al quadrato del secondo e del terzo autostato di massa
- $\Delta m_{12}^2 = m_1^2 - m_2^2$, differenza delle masse al quadrato del primo e del secondo autostato di massa
- Tre angoli di mixing $\theta_{13}, \theta_{12}, \theta_{23}$
- Una fase δ non eliminabile, responsabile della violazione della CP parità

Sebbene alcuni parametri della teoria siano stati misurati con relativa precisione (Tabella 1.4), altri sono soltanto vincolati da limiti superiori.

$ \Delta m_{23}^2 $	$2.0_{-0.7}^{+1.0} \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ @ } 90\% \text{ CL}$
$ \Delta m_{12}^2 $	$7.1_{-0.6}^{+1.2} \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \text{ @ } 90\% \text{ CL}$
θ_{12}	$32.5_{-2.3}^{+2.4} \text{ @ } 68\% \text{ CL}$
θ_{23}	45°
θ_{13}	$< 9^\circ$
δ	0

Tabella 1.4: Parametri della teoria di oscillazione di neutrino

La teoria dell'oscillazione di neutrino afferma che i neutrini in natura si presentano come autostati di sapore e non di massa, i primi sono combinazione lineare di quest'ultimi e viceversa:

$$\nu_\alpha(t) = \sum_j (V_{PMNS})_{\alpha j} \nu_j(t), \quad (1.15)$$

dove $\alpha = e, \mu, \tau$ è l'indice di sapore, $i=1,2,3$ è l'indice di massa e V_{PMNS} è la matrice unitaria di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (che contiene gli angoli in Tabella 1.4). Nell'approssimazione in cui la massa del neutrino è piccola rispetto alla sua energia e considerando solo due famiglie leptoniche (di conseguenza un solo angolo di mixing) possiamo scrivere la probabilità di oscillazione:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(1.27 \frac{\Delta m^2 (\text{eV}^2) L(m)}{E(\text{MeV})} \right), \quad (1.16)$$

dove L è la lunghezza di oscillazione, Δm^2 è la differenza delle masse al quadrato dei due autostati di massa, θ l'angolo di mixing se consideriamo solo due famiglie e E è l'energia del neutrino. Gli esperimenti di neutrino sono progettati in modo da massimizzare il secondo fattore.

L'oscillazione di neutrini introduce, di fatto, una violazione di sapore leptonic nel settore neutro, la quale rende possibile la violazione anche nel settore carico. Ad esempio si può scrivere la larghezza di decadimento del canale $\mu \rightarrow e\gamma$:

$$\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+\gamma) = \frac{1}{64} \frac{G_F^2 m_\mu^5}{128\pi^3} \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{m_W} \right)^2 \sin^2 2\theta. \quad (1.17)$$

Normalizzando per la larghezza totale troviamo che $BR(\mu^+ \rightarrow e^+\gamma) \simeq 10^{-55}$. Questo valore è molto al di fuori della portata degli esperimenti, e quindi dal punto di vista sperimentale possiamo affermare che nel Modello Standard il sapore leptonic nel settore carico è conservato.

1.3.2 Teorie SUSY/GUT

Il Modello Standard presenta un problema di gerarchia tra la scala di rottura elettro debole e la scala di Planck, secondo cui le correzioni alla massa al quadrato del bosone di Higgs sono proporzionali al quadrato del cut-off energetico (la scala di Planck per esempio 10^{19} GeV).

Conseguentemente, essendo la massa del bosone di Higgs attesa dell'ordine di 100 GeV, la divergenza ultravioletta introdotta dal cut off causerebbe un'inconsistenza del Modello Standard.

La supersimmetria (SUSY) è una teoria introdotta al fine di risolvere questo problema.

Considerando che loop fermionici introducono un contributo positivo alla correzione, mentre i loop bosonici un contributo negativo, possiamo scrivere:

$$\Delta m_H^2 \sim (N_f \lambda_f^2 - N_{\tilde{f}} \lambda_{\tilde{f}}^2) \Lambda^2 + \sum (m_f^2)_i - \sum (m_{\tilde{f}}^2)_i, \quad (1.18)$$

dove N_f ($N_{\tilde{f}}$) è il numero di gradi di libertà bosonici (fermionici), λ è la costante di accoppiamento del bosone (fermione) con il bosone di Higgs e Λ è il cut off energetico oltre il quale vi è nuova fisica. In riferimento all'Eq (1.18) con $\tilde{f}$ indichiamo che la particella è di natura bosonica, mentre con f di natura fermionica. Notiamo che se tutti i fermioni nell'Eq. (1.18) avessero la stessa massa, la stessa costante di accoppiamento e, se inoltre il numero di gradi di libertà fermionici e bosonici fosse lo stesso, la correzione alla massa del bosone di Higgs sarebbe nulla. L'idea alla base della supersimmetria è quindi introdurre nuove particelle, dette supersimmetriche, di stessa massa ma natura opposta al partner nel Modello Standard, bosonica se quest'ultimo è un fermione e viceversa.

L'estensione supersimmetrica del Modello Standard prende il nome di Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM). Particella e partner supersimmetrico formano un supermultipletto.

Di supermultipletti ce ne sono di due tipi:

- supermultipletto di gauge, formato da un bosone di gauge e il suo superpartner fermionico
- supermultipletto chirale, formato da un fermione e il suo superpartner bosonico.

particella	squark	sleptone	gluino	chargino	neutralino
campo	$\tilde{q}$	$\tilde{l}$	$\tilde{G}$	$\tilde{\chi}_i^\pm (i = 1 - 2)$	$\tilde{\chi}_i^0 (i = 1 - 2)$
spin	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
partner SM	quark	leptone	gluone	$W^\pm, Z^0, \gamma$	Higgs ($h, H, A, H^\pm$)

Table 1.5: S-particelle

Neutralini e Chargini (Tabella 1.5) nascono in seguito alla rottura della simmetria elettrodebole dal mixing del wino, bino e higgsino, partner supersimmetrici rispettivamente del bosone W, del bosone B e del bosone di Higgs. Nel MSSM vi sono due doppietti di Higgs (H_u, H_d), uno che si accoppia a quark di tipo down e uno a quark di tipo up e il rapporto tra i loro VEVs definisce un parametro della teoria: $\tan \beta = \frac{\langle H_u \rangle}{\langle H_d \rangle}$.

Tuttavia nessun partner supersimmetrico è stato ad oggi osservato. Questo implica che alle energie ad oggi accessibili la supersimmetria è rotta.

La lagrangiana del MSSM consiste quindi di due termini, una lagrangiana SUSY invariante e una di rottura [1]:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SUSY\ inv} + \mathcal{L}_{SUSY\ break}. \quad (1.19)$$

Le masse delle superparticelle nascono dalla rottura “soft” della SUSY, la quale non introduce divergenze quadratiche. Questa rottura introduce un nuovo mixing del sapore leptonico, che non è strettamente correlato al mixing di sapore nei termini di Yukawa. Nel settore degli sleptoni la lagrangiana “soft” si scrive:

$$\mathcal{L}_{soft} = -(m_E^2)_{ij} \tilde{e}_{Ri}^* \tilde{e}_{Rj} - (m_L^2)_{ij} \tilde{l}_{Li}^* \tilde{l}_{Lj} - \{m_0(A_e)_{ij} H_d \tilde{e}_{Ri}^* \tilde{l}_{Lj} + h.c.\}, \quad (1.20)$$

dove m_0 è un parametro di rottura “soft” della SUSY e $(A_e)_{ij}$ è una matrice di accoppiamento trilineare, i cui termini sono adimensionali, $(m_E)_{ij}$ la matrice di massa degli sleptoni destrorsi e $(m_L)_{ij}$ la matrice di massa degli sleptoni sinistrorsi.

Se esiste almeno un elemento non diagonale della matrice di massa degli sleptoni, nella base in cui la matrice di massa dei leptoni è diagonale, allora viene introdotta la violazione di sapore leptonico.

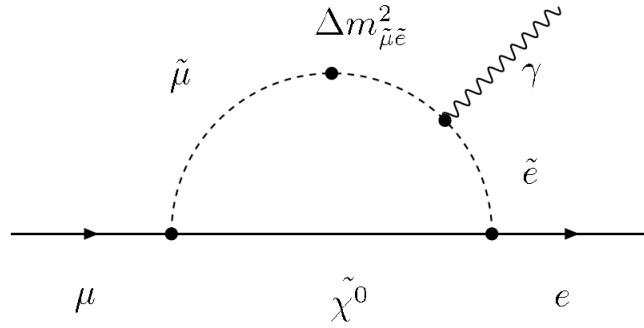


Figure 1.2: Decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ dovuto alla transizione smuone seletttrone. Con $\Delta m_{\tilde{\mu}\tilde{e}}$ indichiamo il termine di mixing fra lo smuone ($\tilde{\mu}$) e il seletttrone ($\tilde{e}$), mentre $\tilde{\chi}_0$ è un neutralino.

Il limite superiore sul BR del decadimento in Figura 1.2 si scrive:

$$\frac{\Delta m_{\tilde{\mu}\tilde{e}}^2}{m_{\tilde{l}}^2} \lesssim 10^{-3} \left(\frac{m_{\tilde{l}}}{100\text{GeV}} \right)^2. \quad (1.21)$$

Notare che affinché questo numero non sia nullo l'elemento di matrice $\tilde{\mu} - \tilde{e}$ deve essere non nullo.

L'intervallo di predizioni sul $BR(\mu \rightarrow e\gamma)$ delle teorie SUSY/GUT copre alcuni ordini di grandezza, dipendendo dal modello e dallo spazio dei parametri di ciascuna. In particolare nell'ambito della SU(5) SUSY/GUT il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma$ è atteso con valori del BR dell'ordine di $10^{-12} - 10^{-14}$ (Figura 3) [1].

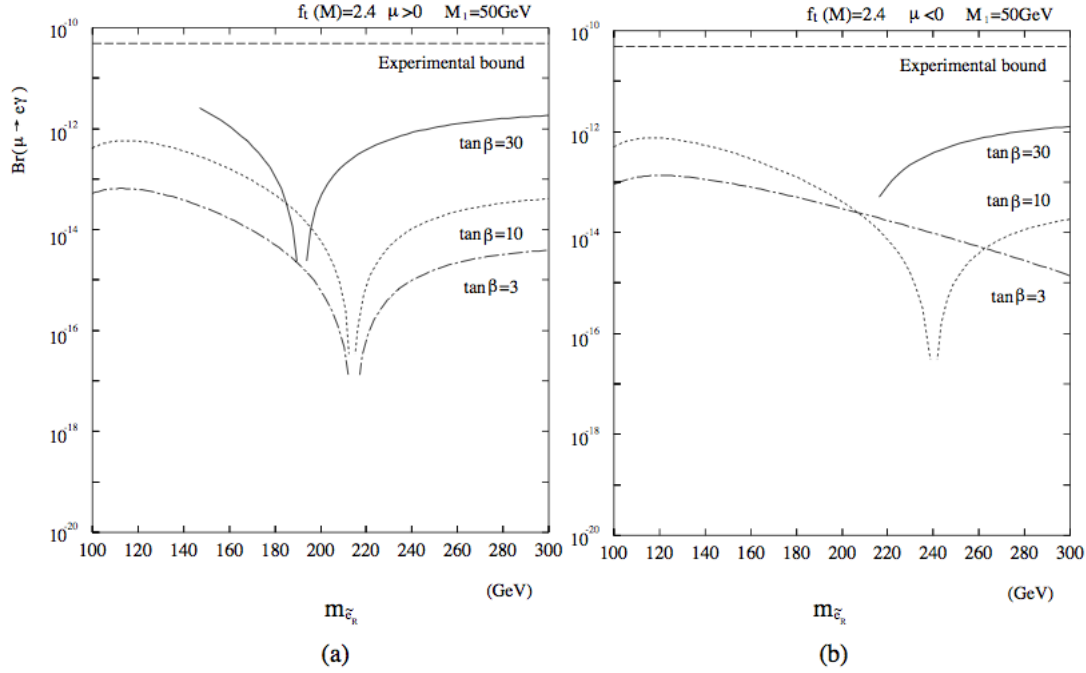


Figure 1.3: Previsioni del $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ in funzione della massa del seletttrone destrorso per $\mu > 0$ (a) e $\mu < 0$. Con μ indichiamo il segno del termine di massa dell'Higgs.

1.4 Il Majorone e la rottura spontanea della R-Parità

La R-Parità (R_P) è un'operatore i cui autovalori sono definiti come ([3])

$$R_P = (-1)^{3B+L+2S}, \quad (1.22)$$

dove B è il numero barionico, L il numero leptonico totale, S lo spin. Ad ogni supermultipletto è associato un valore di $R_P = 1$ per la particella del Modello Standard e $R_P = -1$ per il partner supersimmetrico. E' evidente che se la R_P è conservata, particelle e superparticelle sono prodotti in coppia nelle catene di decadimento, le quali terminano con almeno una delle particelle supersimmetriche più leggere (LSP). Questa assunzione è alla base delle ricerche dirette di supersimmetria, le quali misurano l'energia mancante dovuta in parte alla presenza di LSP nello stato finale, che è stabile e non è rilevabile in quanto non interagisce.

Tuttavia vi sono modelli supersimmetrici contenenti termini che violano esplicitamente la R_P . Questi modelli prevedono molti parametri, alcuni dei quali devono essere posti uguali a zero al fine di evitare decadimenti troppo veloci del protone [3].

Per questo motivo prenderò in considerazione un modello in cui la R_P è una simmetria esatta della lagrangiana, rotta spontaneamente attraverso il meccanismo di Higgs (1989).

Questo implica l'esistenza di un bosone di Nambu-Goldstone, il Majorone, indicato con la lettera J.

Negli anni '90 a LEP le misure della larghezza di stati finali invisibili (Γ_{inv}) dello Z^0 hanno escluso modelli in cui il Majorone sia un tripletto o un doppietto di isospin debole [6], dal momento che questi aumenterebbero la larghezza invisibile dello Z^0 , rendendola inconsistente con quella dovuta ai solo neutrini di tre famiglie leptoniche. Esistono tuttavia dei modelli teorici in cui il Majorone è un singoletto di isospin debole [3]. In tal caso non si applicano i limiti posti dalla Γ_{inv} dello Z^0 .

Il Majorone può inoltre essere emesso nel decadimento doppio beta senza neutrini ($0\nu\beta\beta$). In questo modello il Majorone si accoppia al neutrino di Majorana. Diversi esperimenti hanno posto limiti superiori sulla costante di accoppiamento $\nu - J$ [4].

Nel modello in [3] la R_p è già rotta alla scala di rottura della simmetria elettrodebole. In seguito alla rottura spontanea della R_p si crea un Majorone, che in questo modello è un singoletto di isospin debole. Dal punto di vista della lagrangiana si aggiungono tre singoletti, ν^c , $\hat{S}$ e $\hat{\Phi}$, al MSSM, con numeri leptonici rispettivamente -1, 1, 0 [5], e il superpotenziale si scrive:

$$\mathcal{W} = h_U^{ij} \hat{Q}_i \hat{u}_j \hat{H}_u + h_D^{ij} \hat{Q}_i \hat{d}_j \hat{H}_d + h_E^{ij} \hat{l}_i \hat{e}_j \hat{H}_d + h_\nu^i \hat{l}_i \hat{\nu}^c \hat{H}_u - h_0 \hat{H}_d \hat{H}_u \hat{\Phi} + h \hat{\Phi} \hat{\nu}^c \hat{S} + \frac{\lambda}{3!} \hat{\Phi}^3, \quad (1.23)$$

dove le h sono matrici di accoppiamento nello spazio delle famiglie.

Oltre ai valori di aspettazione nel vuoto dei due doppietti di Higgs, $\langle H_u \rangle = v_u$, $\langle H_d \rangle = v_d$, vi saranno quindi tre VEV, $\langle \hat{\Phi} \rangle = v_\Phi / \sqrt{2}$, $\langle \hat{\nu}^c \rangle = v_R / \sqrt{2}$, $\langle \hat{S} \rangle = v_S / \sqrt{2}$. Alla scala di rottura della simmetria elettrodebole si potrebbe inoltre avere un VEV diverso da zero per il neutrino scalare $\langle \tilde{\nu}_i \rangle = v_{Li} / \sqrt{2}$.

Importanti implicazioni vengono fuori se accade che $v_R, v_S \neq 0$:

- i neutrini assumono massa [3]

$$m_{\nu_{ij}} = - \frac{h_{\nu_{i\tau}} h_{\nu_{j\tau}} M_0 v_R^2 v_d^2}{h_0 v_\Phi (2v_u v_d M_0 - h_0 v_\Phi M_1 M_2)} \quad (1.24)$$

essendo M_1 e M_2 le masse dei gaugini dopo la rottura della supersimmetria

- violazione di sapore leptonico nel settore dei leptoni carichi.

In questo modello il Majorone non massivo è la particella più leggera, quindi stabile, e può presentarsi nello stato finale di alcuni decadimenti. Ad esempio nei decadimenti leptonici con violazione di sapore leptonico ([5]):

$$l_i \rightarrow l_j J. \quad (1.25)$$

Questa tesi è dedicata in particolare allo studio del decadimento $\mu \rightarrow eJ$.

1.5 Il decadimento $\mu \longrightarrow eJ$

Per un muone con vettore di polarizzazione $\vec{P}_\mu$ la larghezza di decadimento differenziale del canale $\mu \longrightarrow eJ$ è data da:

$$\frac{d\Gamma(\mu \longrightarrow eJ)}{d \cos \theta} = \frac{m_\mu}{64\pi} |O_{L\mu eJ}^{ccp}|^2 (1 \pm P_\mu \cos \theta), \quad (1.26)$$

dove θ è l'angolo fra l'impulso del positrone e la direzione di polarizzazione del muone, P_μ è il modulo del vettore di polarizzazione e $O_{L\mu eJ}^{ccp}$ è un elemento di matrice che dipende dai parametri del modello, in particolare dai valori di aspettazione nel vuoto dei bosoni di Higgs e dei campi $\hat{S}$ e $\hat{\nu}^C$.

In questa larghezza differenziale abbiamo trascurato la massa del positrone. Integrando un range simmetrico di $\cos \theta$:

$$\Gamma(\mu \rightarrow eJ) = \frac{m_\mu}{32\pi} |O_{L\mu eJ}^{ccp}|^2. \quad (1.27)$$

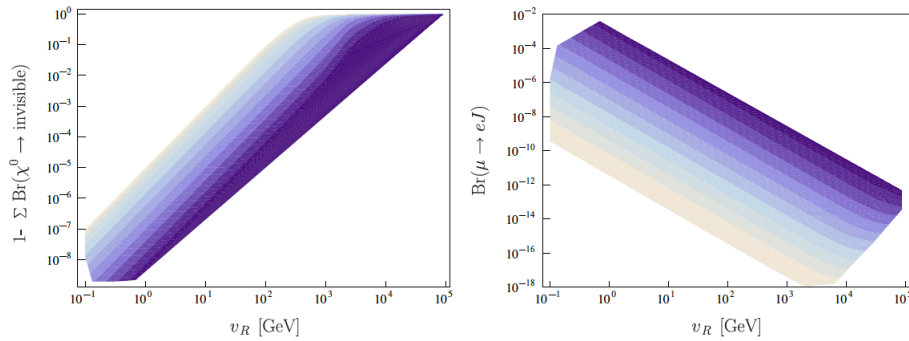


Figura 1.4: BR del neutralino che decade in particelle visibili (sinistra) e $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ (destra) vs v_R in GeV per diversi valori di v_Φ tra $[1 - 100]$ TeV indicati in valori crescenti, dai diversi colori, dal più chiaro al più scuro in scala logaritmica.

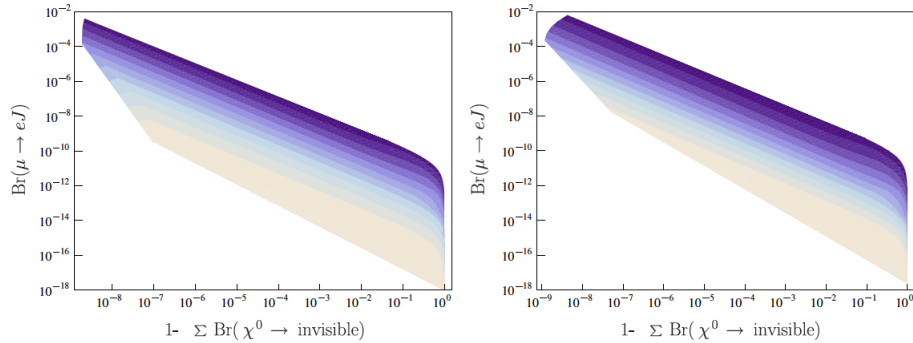


Figura 1.5: BR del neutralino che decade in particelle visibili vs $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ per due diversi punti nello spazio dei parametri di mSUGRA ($M_0, m_{\frac{1}{2}}, A, \tan \beta, \text{sign}(\mu)$) per diversi valori di v_Φ .

In Figura 1.4 notiamo che $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ è grande per piccoli valori di v_R , mentre il contrario avviene per il neutralino che decade in particelle visibili. In Figura 1.5 si nota che $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ è grande in una regione in cui è grande il decadimento del neutralino in invisibile. Di conseguenza, in uno scenario di violazione della parità in cui il $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ sia a un livello

misurabile dagli attuali esperimenti, il BR dei neutralini in particelle invisibili resterebbe alto, come in uno scenario di conservazione della parità. In tal caso non sarebbero condizionate in alcun modo, ai collisionatori adronici, le ricerche di supersimmetria basate sulla presenza di particelle non visibili nello stato finale (energia mancante). Tali ricerche non sarebbero quindi in grado di distinguere uno scenario di conservazione della R-parità da uno scenario di violazione, com'è invece possibile fare con una ricerca diretta del decadimento $\mu \rightarrow eJ$. Tale ricerca è quindi complementare alle informazioni ricavabili dai collisionatori adronici.

Confrontando i due plot di Figura 1.3, relativi a due diversi punti nello spazio dei parametri di mSUGRA, notiamo che la $BR(\mu \rightarrow eJ)$ non dipende molto dalla scelta dei parametri di mSUGRA.

1.6 Il decadimento $\mu \rightarrow eJ\gamma$

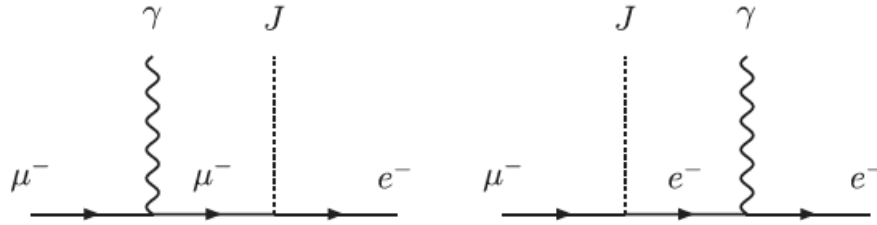


Figura 1.6: Diagrammi di Feynman per il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma J$. [5]

Consideriamo ora il decadimento $\mu \rightarrow e\gamma J$ in Figura 6. Come per il decadimento radiativo $\mu \rightarrow e\nu\nu\gamma$, questo decadimento presenta una divergenza infrarossa per $m_\gamma = 0$. Trascurando la massa del fotone possiamo scrivere:

$$\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma J) = \frac{\alpha}{64\pi^2} |O_{L\mu e J}^{ccp}|^2 m_\mu \mathcal{I}(x_{min}, y_{min}), \quad (1.28)$$

dove $\mathcal{I}(x_{min}, y_{min})$ è un integrale nello spazio delle fasi

$$\mathcal{I}(x_{min}, y_{min}) = \int dx dy \frac{(x-1)(2-xy-y)}{y^2(1-x-y)}, \quad (1.29)$$

con $x = \frac{2E_e}{m_\mu}$ e $y = \frac{2E_\gamma}{m_\mu}$. Con x_{min} e y_{min} indichiamo quindi le minime energie misurabili di positrone e fotone in un determinato esperimento.

Utilizzando la (27) otteniamo:

$$Br(\mu \rightarrow e\gamma J) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{I}(x_{min}, y_{min}) Br(\mu \rightarrow eJ). \quad (1.30)$$

Per calcolare il valore dell'integrale $\mathcal{I}(x_{min}, y_{min})$, oltre a tenere conto delle restrizioni imposte dall'esperimento su x_{min}, y_{min} , dobbiamo tenere conto del vincolo proveniente dall'angolo fra il fotone e il positrone:

$$\cos \theta_{e\gamma} = 1 + \frac{2 - 2(x + y)}{xy}. \quad (1.31)$$

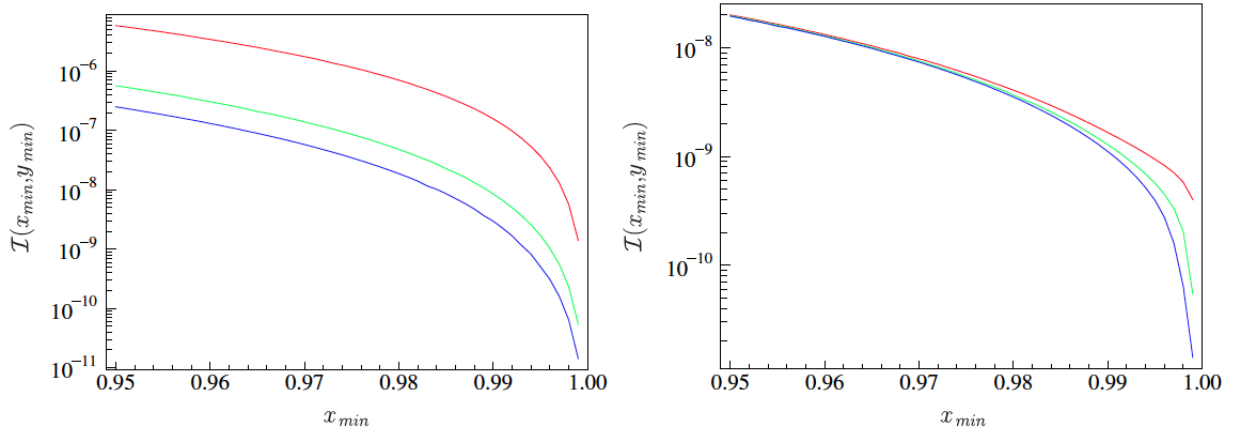


Figure 1.7: $\mathcal{I}(x_{min}, y_{min})$ in funzione di x_{min} per tre diversi valori di $y_{min} = 0.95, 0.99, 0.995$ e per due differenti valori di $\cos \theta_{e\gamma}$: a sinistra $\cos \theta_{e\gamma} = -0.99$ e a destra $\cos \theta_{e\gamma} = -0.99997$

In linea di principio l'esperimento MEG sarebbe in grado di cercare entrambi i canali, $\mu \rightarrow eJ$ e $\mu \rightarrow eJ\gamma$, in quanto possiede anche un calorimetro elettromagnetico per la rivelazione dei fotoni. Tuttavia l'accettanza del rivelatore e le selezioni del trigger, ottimizzati per la ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$, riducono lo spazio delle fasi ostacolando la ricerca del canale radiativo. Questo problema non si pone per il decadimento $\mu \rightarrow eJ$, che per l'appunto sarà l'oggetto di studio di questa tesi.

1.7 Limiti attuali sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$

Negli anni '80 a Vancouver in Canada [8], nella beam line M13 del ciclotrone TRIUMF, muoni positivi altamente polarizzati venivano fermati su bersaglio. I dati raccolti venivano usati per misurare la rate relativa dei positroni all'end point dello spettro in energia nella direzione opposta a quella dello spin del muone.

Questa collaborazione ha posto un limite superiore sul $BR(\mu \rightarrow e f) = 2.6 \cdot 10^{-6} @ 90\% CL$, dove f è un familone, un bosone di Nambu-Goldstone che si crea in uno scenario di rottura spontanea della simmetria di sapore (nel 1986 una teoria che prevedesse il Majorone non era ancora stata formulata). Tuttavia questo limite è stato posto assumendo una distribuzione angolare isotropica per l'emissione del familone e corrisponde a qualche 10^{-5} assumendo una distribuzione angolare proporzionale a $1 - \cos \theta$.

Più di recente la collaborazione di TWIST ha studiato il canale $\mu \rightarrow eJ$ assumendo diverse distribuzioni angolari del segnale. Anche in TWIST muoni da fascio venivano fermati su un bersaglio. La struttura dell'esperimento TWIST è mostrata in Figura 8.

In Tabella 5 sono riportati i risultati di TWIST, non ancora pubblicati, per i limiti superiori sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ con Majorone non massivo.

Distribuzione angolare	$BR(\mu \rightarrow eJ) @ 90\% \text{ CL}$
<i>isotropa</i>	$\leq 3.3 \cdot 10^{-5}$
$1 - \cos \theta$	$\leq 6.7 \cdot 10^{-5}$
$1 + \cos \theta$	$\leq 8.5 \cdot 10^{-6}$

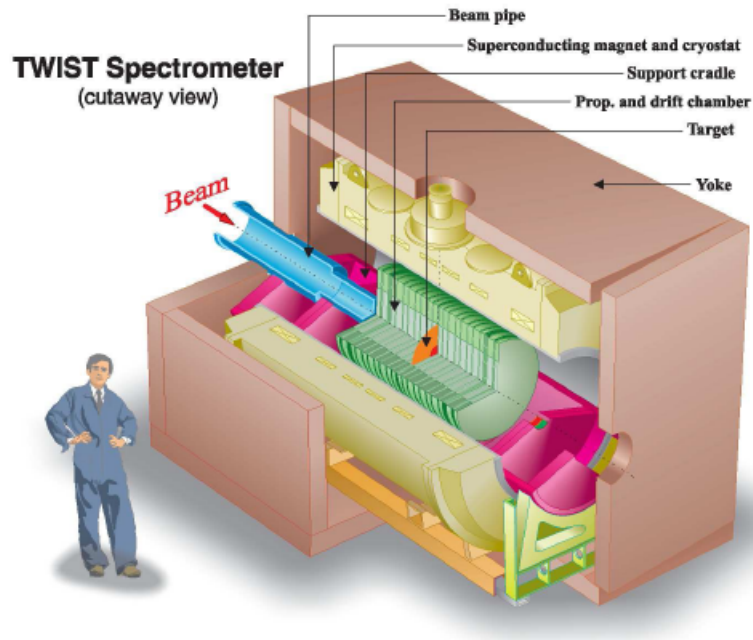
Tabella 1.6: Risultati di TWIST ottenuti utilizzando $5 \cdot 10^8$ eventi di decadimento

Figura 1.8: Sezione esperimento TWIST

Capitolo 2

L'esperimento MEG

L'esperimento MEG è stato proposto al Paul Scherrer Institut nel 1999 ed è in presa dati dal 2008. La collaborazione è formata da ricercatori provenienti da istituti nei seguenti paesi: Italia, Giappone, Svizzera, Russia, Stati Uniti.

La ricerca di un processo raro, come il $\mu \rightarrow e\gamma$, richiede una misura estremamente precisa delle variabili cinematiche. A tale scopo per ognuno dei prodotti di decadimento è previsto un sistema di rivelazione dedicato: il fotone è rivelato attraverso la sua interazione con un calorimetro a Xenon liquido (LXe), mentre il positrone viene tracciato all'interno di uno speciale magnete chiamato COBRA per mezzo di camere a deriva e rivelato infine su di un rivelatore chiamato 'Timing Counter' (TC) posizionato all'esterno del tracciatore. Il sistema di tracciatura definisce direzione di emissione ed impulso del positrone, mentre il TC ne misura il tempo di volo. Come si vede dallo schema riportato in Figura 2.1, il rivelatore non copre completamente l'angolo solido attorno al bersaglio, ma solo un valore di circa il 10%, sia perché si cerca di minimizzare il materiale di fronte al calorimetro per avere massima efficienza (cioè non assorbire i fotoni nel loro percorso, che per ragioni economiche. I segnali dei rivelatori sono collegati al sistema di acquisizione pilotato dal sistema di Trigger. Il sistema di riferimento cartesiano dell'esperimento ha l'origine al centro del bersaglio dove vengono arrestati i muoni, l'asse z è diretto lungo la direzione del fascio, y è diretto verso l'alto ed il calorimetro è situato nel semispazio a $x < 0$. 3.

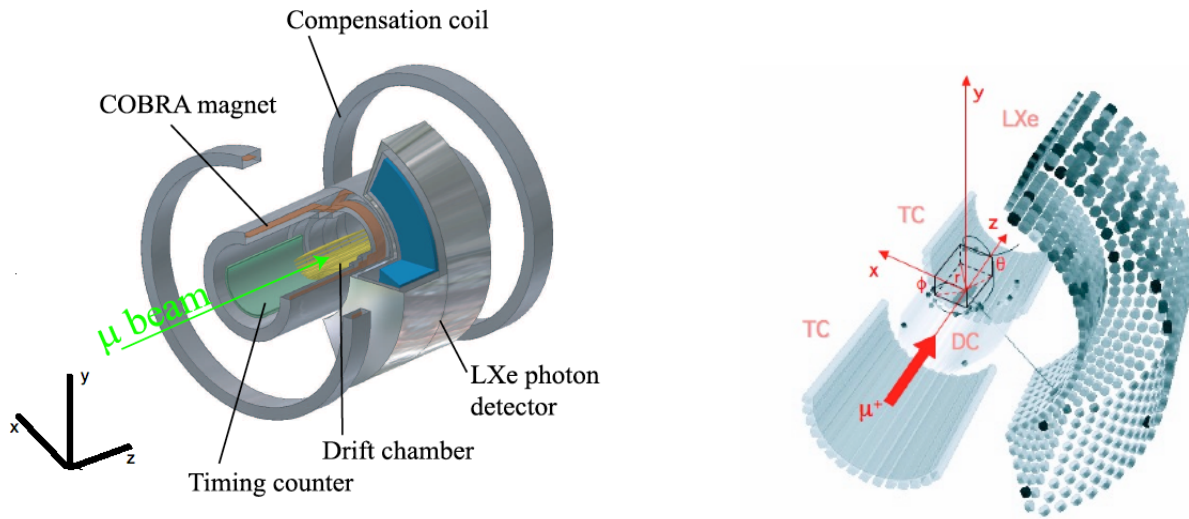


Figure 2.1: Vista tridimensionale dell'esperimento MEG (sinistra). Vista tridimensionale del Timing Counter e del calorimetro (destra).

2.1 La Linea di fascio e il bersaglio

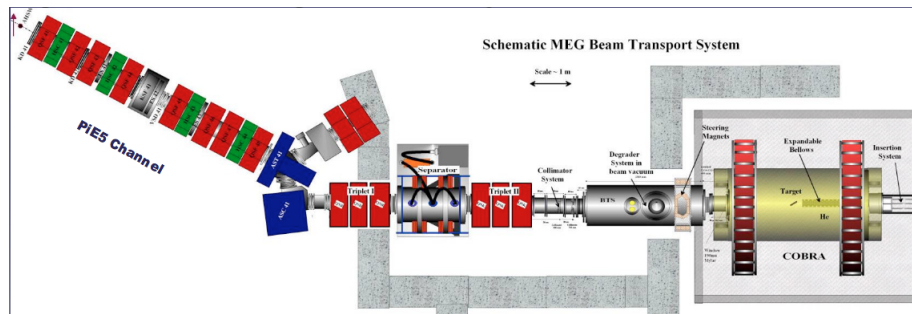


Figura 2.2: Linea di fascio vista dall'alto

La linea di fascio utilizzata dall'esperimento MEG proviene da un protosincrotrone nel quale vengono accelerati protoni fino a 590 MeV/c, con una corrente di fascio media pari a 2.0 mA. In una prima fase i protoni del fascio urtano una serie di bersagli di grafite in sequenza, dove interagiscono forte con i nuclei di carbonio. Questi bersagli hanno spessori diversi: 7 mm per il bersaglio sottile, M-target, 40 e 60 mm per il bersaglio più spesso, E-target. I prodotti finali dell'interazione sono principalmente neutroni e pioni, dato che l'energia dei protoni non è sufficiente per produrre kaoni. I pioni a loro volta decadono in volo in elettroni e muoni: dato che il decadimento del pione in muone è di gran lunga più favorito rispetto al decadimento elettrone, la maggior parte di questi proviene dalla creazione di coppie di fotoni, provenienti dal decadimento del pione neutro. I muoni provenienti dai pioni che decadono sulla superficie del bersaglio sono detti muoni di superficie ("surface muons"), sono altamente

polarizzati e hanno un impulso di 29 MeV/c. L'esperimento MEG utilizza la linea di fascio $\pi E5$ (Figura 2.2) con il più alto numero di "surface muons". I muoni che arrivano sul bersaglio sono positivi al fine di evitare una riduzione della rate di decadimento dovuta alla cattura nucleare alla quale sono soggetti i muoni negativi.

Prima di arrivare sul bersaglio di MEG il fascio deve essere ripulito dai positroni il cui numero è in media sono dieci volte maggiore del numero dei muoni. In più l'impulso dei muoni da 29 MeV/c va degradato per far sì che questi si fermino sul bersaglio. Un'attenta simulazione ha portato al progetto definitivo della linea di fascio. Essa comprende i seguenti elementi (Figura 2.2) prima del magnete COBRA:

- un tripletto di quadrupoli
- un selettore di velocità che devia lateralmente, con un campo elettrico, di 11 cm muoni da elettroni 2 m prima del bersaglio. Questa separazione equivale a 7 volte lo scarto quadratico medio combinato delle due distribuzioni in Figura 2.3.
- un altro tripletto di quadrupoli per focalizzare il fascio dopo la separazione.
- un solenoide di trasporto (B.T.S.) utilizzato come giunzione tra l'ultimo quadrupolo ed il magnete superconduttore COBRA. All'interno è inserito il degradatore per ridurre l'impulso dei muoni nel fascio.

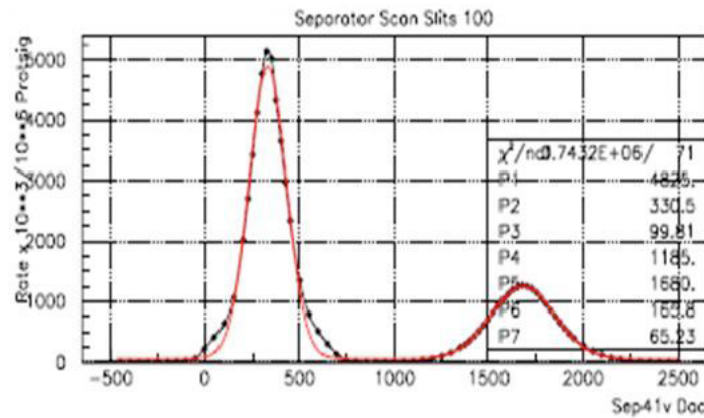


Figure 2.3: Fit a doppia gaussiana della separazione parziale tra positroni, gaussiana di sinistra, e muoni, gaussiana di destra (sull'asse orizzontale 500 ~ 5 cm).

MEG utilizza un bersaglio di polietilene di spessore $205 \mu m$, in Figura 2.4, inclinato di 22° rispetto all'asse z , al fine di garantire l'arresto dei muoni incidenti minimizzando lo scattering coulombiano multiplo dei positroni uscenti.

Il fascio di muoni può essere focalizzato su un'ellisse di dimensioni calcolate di $\sigma_x = 5.5 mm$ e $\sigma_y = 6.5 mm$. Il multiplo scattering nel materiale presente sulla linea di volo dei μ dal B.T.S. fino al bersaglio (degradatore, finestra a vuoto della linea di fascio, atmosfera ad elio) porta le dimensioni trasverse a 10 mm per entrambi gli assi.

Il fascio ha una intensità di $3.7 \cdot 10^8 \mu/s$, valore che potrebbe essere maggiore. Tuttavia un aumento dell'intensità causerebbe un affollamento delle camere e un aumento del fondo accidentale, entrambi effetti indesiderati.



Figure 2.4: Il bersaglio

2.2 Lo spettrometro

Lo spettrometro è una struttura cilindrica formata da un magnete superconduttore, il COBRA e un sistema di 16 camere a deriva. Il positrone uscente dal bersaglio, immerso nel campo magnetico del COBRA, è rivelato dalle camere a deriva disposte radialmente, che occupano solo metà del cilindro.

2.2.1 Il magnete COBRA

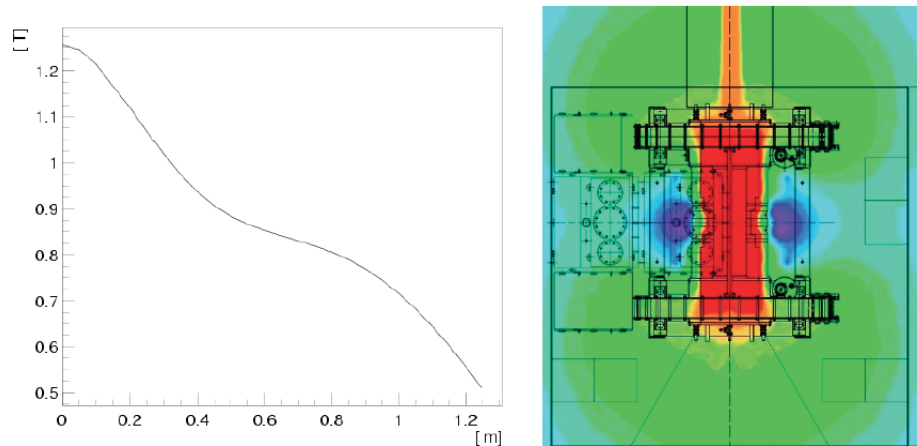


Figura 2.5: IL campo magnetico del COBRA in funzione di z (sinistra). Intensità del campo magnetico nella zona del rivelatore: la zona in rosso corrisponde alla massima intensità, quella blu alla minima ed è inferiore ai 50 G.

Il magnete COBRA (COnstant Bending RAdius) è un elettromagnete superconduttore cilindrico che avvolge il volume di He in cui è installato il sistema di camere a deriva. Questo genera un gradiente di campo magnetico in z (1.27 T al centro e 0.49 T agli estremi, in Figura

2.5), in cui i positroni con lo stesso impulso in valore assoluto seguono traiettorie con un raggio di curvatura costante, indipendente dall'angolo di emissione (su un grande intervallo angolare $\cos \theta < 0.35$) Figura 2.6 . Il gradiente di campo permette di discriminare positroni di basso impulso fino a un numero pari a 10^7 positroni emessi al secondo [10]. Inoltre, dato che le camere a deriva sono poste ad un raggio $r > 19.3$, solo i positroni di alto impulso raggiungono il volume di tracciatura. Il gradiente inoltre permette di far uscire rapidamente dal volume di tracciatura tracce che tendono a spiraleggiare, riducendo così i pile-up accidentali (Figura 2.6 A).

Lo spessore delle pareti del COBRA è pari a $0.197X_0$, tale per cui l'85% dei fotoni da 52.8 MeV attraversano le pareti senza fare sciame elettromagnetico. Due bobine di Helmholtz generano un campo di 150 Gauss esternamente al COBRA in modo da minimizzare il campo residuo prodotto da questo, il quale inciderebbe sul corretto funzionamento dei PMTs del calorimetro.

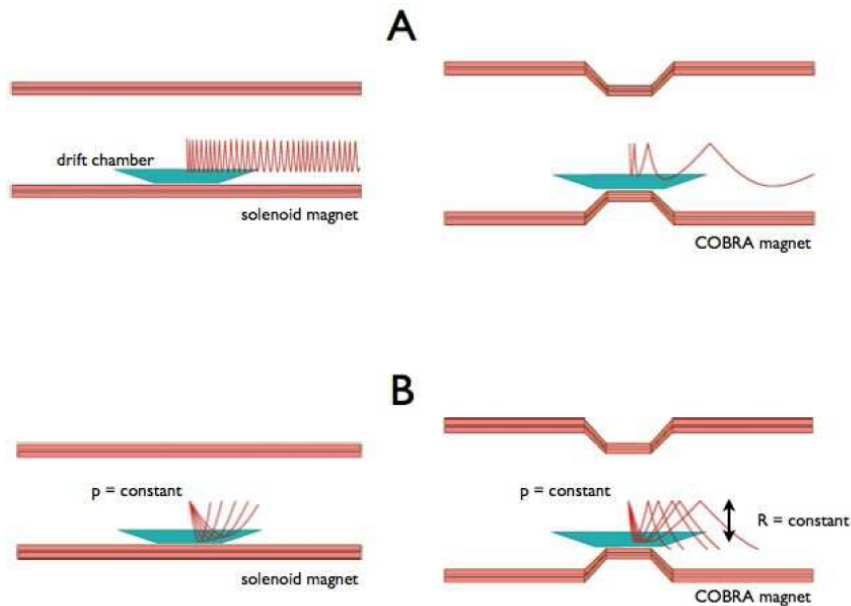


Figura 2.6: Il gradiente del magete COBRA confrontato con un solenoide normale. (A) I positroni sono espulsi rapidamente dal volume di tracciatura. (B) Positroni con lo stesso impulso hanno stesso raggio di curvatura.

2.2.2 Il sistema di camere a deriva

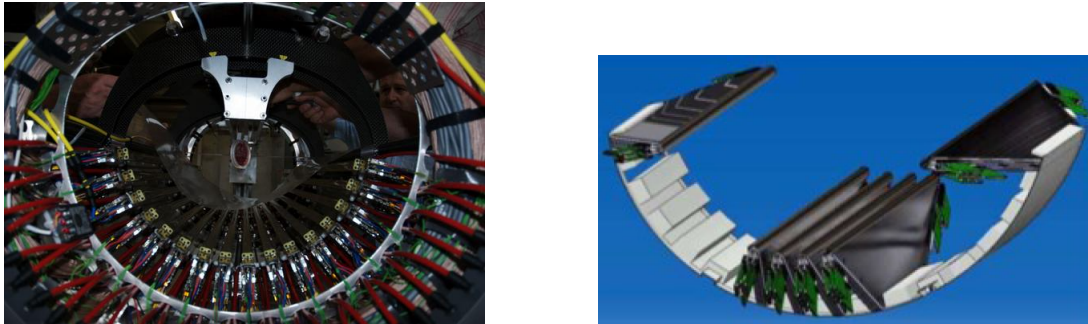


Figura 2.7: Disposizione delle camere a deriva

Le 16 camere a deriva sono disposte radialmente, Figura 2.7, ad intervalli di 10° l'una dall'altra. Ogni camera ha una forma trapezoidale ed è formata da 2 piani di fili sfalsati, al fine di risolvere l'ambiguità destra-sinistra. L'area sensibile è posta nell'intervallo $19.3 \text{ cm} < r < 27 \text{ cm}$ e $|z| < 50 \text{ cm}$ in relazione al raggio interno e $|z| < 21.9 \text{ cm}$ per il raggio esterno. La distanza delle camere dal bersaglio è tale da ridurre l'affollamento di positroni di basso impulso. Nel caso di positroni da 52.8 MeV la copertura angolare è $|\cos \vartheta| < 0.37$ e $-60^\circ < \phi < 60^\circ$. Ogni camera è riempita di una miscela di He e C_2H_6 in egual misura. Questa miscela è stata scelta al fine di ridurre la perdita di energia per ionizzazione e lo scattering multiplo ($X_0 \simeq 650 \text{ m}$).

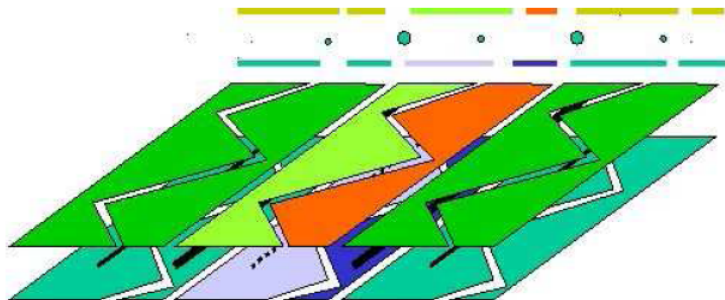


Figura 2.8: Particolare del pattern di Vernier di tre celle a drift

La configurazione di ogni camera, Figura 2.8, permette di misurare contemporaneamente la coordinata r dalla misura del tempo di deriva degli elettroni di ionizzazione, con una risoluzione temporale di $\sim 5 \text{ ns}$. Considerando che la velocità di deriva nel gas è circa $4 \text{ cm}/\mu\text{s}$ per un campo elettrico di circa $1.5 \text{ KV}/\text{cm}$, possiamo stimare una risoluzione sulla coordinata radiale $\delta r \approx 150 \div 200 \mu\text{m}$ (tenendo inoltre in conto che la risoluzione temporale è di qualche ns). La resistività dei fili introduce una dipendenza da z nell'asimmetria di carica alle estremità della posizione assiale. Una prima stima della coordinata z si può ottenere da tale asimmetria, con una risoluzione $\sigma \sim 1 \text{ cm}$. Per ottenere una migliore risoluzione un sottile strato di alluminio è depositato sui fogli catodici in modo da produrre una segmentazione

(pattern di Vernier). La distribuzione della carica indotta sui pad di Vernier permette di migliorare la misura di z fino ad una risoluzione di circa $300 \mu\text{m}$ (Appendice A).

Le risoluzioni attese dall'apparato di tracciatura sono state investigate attraverso una simulazione basata su GEANT 3.21. I risultati della simulazione sono stati utilizzati per provare le prestazioni di diversi metodi per la ricostruzione di tracce di positroni da 52.8 MeV ottenendo risoluzione $\frac{\Delta p}{p} = 0.9 \%$ in impulso e di 12 mrad FWHM per l'angolo di emissione. Il vertice del decadimento del μ sul bersaglio può essere ricostruita con una risoluzione di 2.5 mm FWHM.

2.3 Il Timing Counter

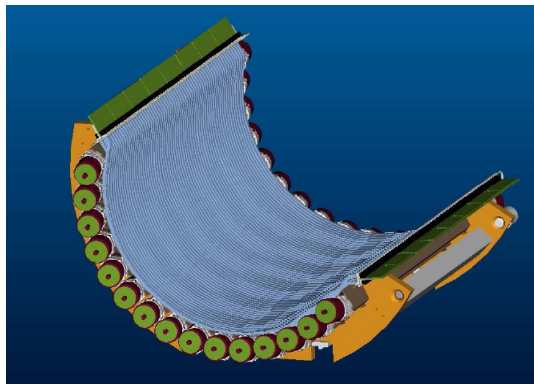


Figura 2.9: Uno dei blocchi del timing counter

Il timing counter (TC) ha lo scopo di misurare il tempo di impatto del positrone. Il sistema è composto da due blocchi identici di 15 barre, come in Figura 2.9, disposte a raggio costante uguale a 31 cm (dall'asse z). I due blocchi sono posti simmetricamente rispetto alla posizione del bersaglio, coprono 145° in ϕ e l'intervallo $25 \leq |z| \leq 95 \text{ cm}$.

Ogni barra è fatta di scintillatore plastico BC404, le cui caratteristiche sono riportate in Tabella 2.1, di sezione quadrata ($l=4 \text{ cm}$), e sono lunghe 80 cm .

Efficienza luminosa (% antracene)	68
Tempo di salita	0.7 ns
Tempo di decadimento	1.8 ns
Lunghezza d'onda di picco	408 nm
Lunghezza d'onda di attenuazione	140 cm

Tabella 2.1: Caratteristiche dello scintillatore PVT BC404

Data la geometria del campo magnetico si ha che i positroni emessi con $|\cos(\vartheta)| \leq 0.35$ incidono sul TC dopo aver completato ≈ 1.5 giri sul piano $r - \phi$. Ogni barra di scintillatore è letta agli estremi da due PMT di tipo “fine-mesh” tali da operare in campo magnetico. Questi PMT sono orientati in maniera tale da minimizzare la dispersione, indotta dal campo, del tempo di transito della catena dinodica, Figura 2.10.

Ciascun blocco di barre è rivestito da 256 fibre scintillanti di sezione quadrata con lato 0.5 cm , orientare lungo la coordinata azimutale, lette da una matrice di fotodiodi a valanga (APD).

La presenza di queste fibre permette di determinare con maggiore precisione la coordinata z del punto di impatto.

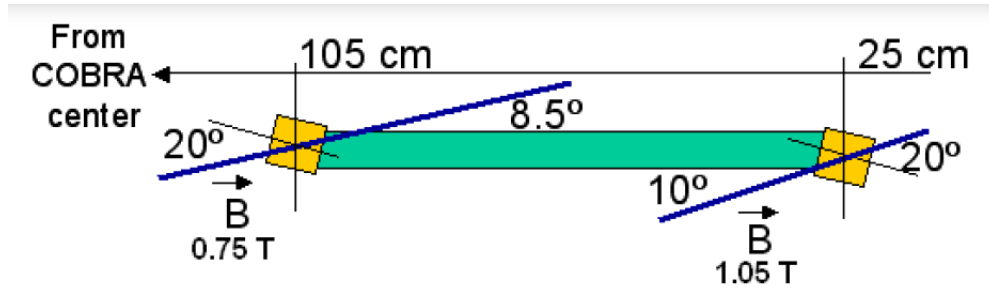


Figura 2.10: Una barra del TC con relativi PMT

I PMT hanno un tempo di vita limitato se immersi in atmosfera con alta concentrazione di He. Per questo motivo il TC viene isolato dal tracciatore attraverso un involucro di materiale plastico, all'interno del quale vi è azoto.

2.4 Il Rivelatore di fotoni

L'esperimento MEG ha scelto di adottare, per la rivelazione del fotone, una tecnica calorimetrica innovativa, basata sulla scintillazione dello Xe liquido, in grado di combinare un'efficiente resa di luce, tipica dei cristalli inorganici, con una rapidità di risposta prossima a quella degli scintillatori organici.

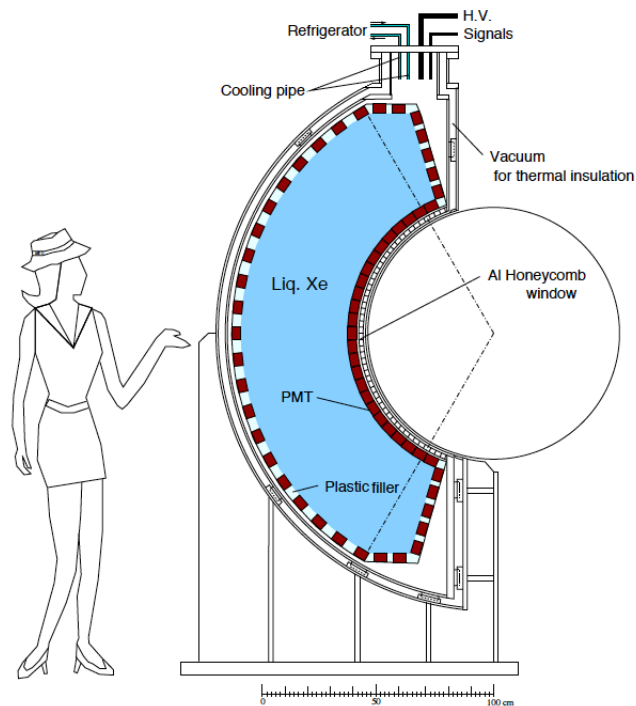


Figura 2.11: Sezione del calorimetro nel piano xy

2.4.1 Scintillazione nello Xenon Liquido

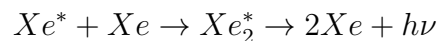
Lo Xenon liquido (LXe) è il gas nobile con la più alta temperatura di ebollizione tra i gas nobili (165 K a 1 atm) e con un alto numero atomico ($Z=54$). Queste due caratteristiche unite ad una maggiore densità nello stato liquido ($\rho = 2.95 \text{ g/cm}^3$) lo rende un ottimo radiatore con una lunghezza di radiazione $X_0 = 2.77 \text{ cm}$. Di conseguenza un calorimetro a Xenon liquido può essere progettato in dimensioni molto compatte. Le principali caratteristiche dello Xenon liquido sono riportate in Tabella 2.2.

Densità	2.95 g/cm ³
Temperatura di ebollizione e liquefazione (1 atm)	165 K , 161 K
Energia depositata per fotone di scintillazione (γ/α)	24 eV/19 eV
Lunghezza di radiazione	2.77 cm
Tempo di decadimento	4.2 ns, 22 ns, 45 ns
Lunghezza d'onda del picco di emissione	178 nm
Lunghezza di assorbimento per la luce di scintillazione	>100 cm
Lunghezza di attenuazione	~40 cm
Indice di rifrazione	1.6-1.72

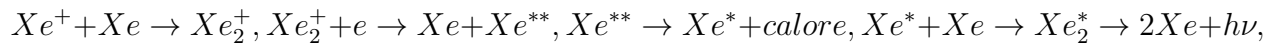
Tabella 2.2: Caratteristiche del LXe

Lo Xenon liquido, a parità di energia del fotone entrante, emette una quantità di fotoni di scintillazione paragonabile allo Ioduro di Sodio (NaI), con la differenza che il processo di scintillazione è molto più rapido. Questo garantisce un'ottima risoluzione in energia unita a una risoluzione temporale che risponde alle richieste dell'esperimento. Inoltre la velocità di risposta riduce l'indesiderato effetto del pile-up, che costituisce un elemento non trascurabile in un esperimento ad alto affollamento come MEG.

La luce emessa di scintillazione è nel vicino ultravioletto (VUV) , con una lunghezza d'onda pari a $178 \pm 13 \text{ nm}$. Il meccanismo di scintillazione del LXe è duplice poichè coinvolge atomi eccitati di Xe (Xe^*) e ioni Xe^+ [14], di conseguenza ai seguenti decadimenti corrispondono a due tempi differenti:



oppure



dove $h\nu$ è un fotone emesso in seguito alla diseccitazione dell'eccimero Xe_2^* . L'energia rilasciata nel decadimento dell'eccimero è minore rispetto alla differenza di energia tra lo stato fondamentale ed il primo eccitato dell'atomo di Xe ed inoltre l'eccimero non esiste nello stato fondamentale ma solo nel livello eccitato. Di conseguenza lo Xe è trasparente alla sua frequenza.

Tuttavia piccole impurità (molecole di ossigeno o di acqua) possono causare un assorbimento di luce e compromettere quindi l'uniformità della risposta del calorimetro, con conseguenze negative sulla risoluzione di energia. Per evitare questo inconveniente è stato installato un sistema di purificazione dello Xenon liquido tale mantenere la concentrazione di queste impurità più bassa di qualche parte per miliardo, valore stimato per le condizioni di funzionamento ottimale.

2.4.2 Caratteristiche del calorimetro a Xenon Liquido

Il calorimetro di MEG è a forma di settore cilindrico tale per cui i fotoni provenienti dal bersaglio incidono perpendicolarmente sulla superficie laterale interna. Il volume di 0.8 m^3 di LXe è letto da 846 PMT Hamamatsu R9299, sensibili alla luce ultravioletta. Dato che i fotoni interagiscono mediamente in una zona più vicina alla faccia interna, qui vi troviamo una maggiore densità di PMT.

Il rivelatore copre un intervallo angolare $|\cos(\vartheta)| < 0.35$ e 120° in ϕ , corrispondente a circa il 10% dell'angolo solido.

Per quanto riguarda le prestazioni, le risoluzioni sono di 150 ps FWHM per la misura temporale, mentre circa il 4% FWHM per la misura di energia, per fotoni da 52.8 MeV (Figura 2.12).

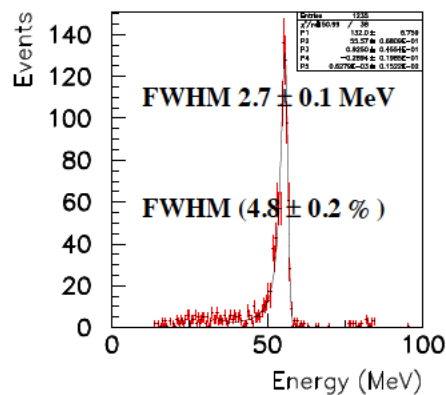


Figura 2.12: Energia ricostruita su fotoni da 55.5 MeV .

2.4.3 Calibrazioni del calorimetro a Xenon liquido

Durante la presa dati, le prestazioni del calorimetro sono monitorate periodicamente. Vengono presi eventi di calibrazione attraverso depositi di energia in posizioni note, assieme ad eventi generati da sorgenti di luce (LED) al fine di misurare il guadagno l'efficienza quantica dei PMT. In appendice B sono descritti i vari metodi di calibrazione.

2.5 Trigger e DAQ

L'elevata intensità del fascio ed il conseguente affollamento dei rivelatori richiedono lo sviluppo di un sistema di Trigger in grado di elaborare i segnali dei rivelatori con la massima rapidità. Questo pone un limite all'utilizzo delle informazioni fornite dal tracciatore, dal momento che la deriva degli elettroni e la successiva formazione dei segnali anodici richiedono un tempo superiore alla latenza massima accettabile (circa $300 \div 350 \text{ ns}$). Per questo motivo all'interno degli algoritmi di trigger per gli eventi $\mu \rightarrow e\gamma$ sono utilizzati il calorimetro ed il TC, mentre non si tiene conto dell'informazione delle camere a deriva.

2.5.1 Il sistema di trigger

Il sistema di trigger si basa sulle seguenti quantità per discriminare gli eventi:

- l'energia rilasciata nel calorimetro,
- il punto ed il tempo di conversione del fotone nel calorimetro
- il punto di impatto del positrone sul TC
- il tempo di arrivo del positrone sul TC

Posizione e tempo di arrivo del positrone nel TC sono messi in relazione con quelli del fotone nel calorimetro per ottenere le quantità $\theta_{e\gamma}$, l'angolo relativo tra fotone e positrone, e $T_{e\gamma}$, il tempo relativo di emissione. Un evento $\mu \rightarrow e\gamma$ richiede collinearità ($\theta_{e\gamma} = 180^\circ$) e contemporaneità ($T_{e\gamma} = 0$) di emissione di fotone e positrone in più alla monocromaticità del fotone. Il trigger che opera stringenti tagli su queste variabili per la selezione del $\mu \rightarrow e\gamma$ è il trigger 0, con una rate di 8 Hz.

Oltre al trigger 0 sono stati implementati altri algoritmi di trigger per le operazioni di calibrazione e monitoraggio dell'apparato e per la misura dei fondi dell'esperimento (decadimento radiativo, positroni di Michel, fotoni singoli etc.). Come vedremo più avanti c'è un trigger (trigger 22) che ha come unica richiesta che il positrone raggiunga il TC.

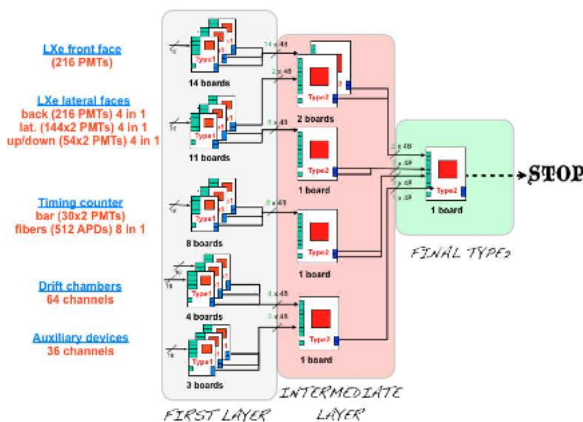


Figure 2.13: schema del trigger di MEG

2.5.2 Il DAQ

Il sistema di Acquisizione Dati o DAQ è costituito da campionatori di forma d'onda, chiamati DRS (Domino Ring Sampler), alloggiati in crate VME interfacciati a calcolatori del sistema 'on-line'[14]. I segnali provenienti dai rivelatori sono individualmente campionati dal DRS, un circuito analogico costituito da 1024 condensatori consecutivi abilitati in sequenza a campionare il segnale in ingresso ad una frequenza di 2 GHz. All'occorrenza di un segnale di trigger le cariche collezionate sui capacitori sono convertite in parole a 14 bit e registrate. Il

campionamento a 2 GHz si rende necessario sia per ottenere una un contributo elettronico alla risoluzione temporale $< 50ps$ mediante un'interpolazione degli impulsi, sia per identificare e rigettare il 'il pile-up' di eventi nei rivelatori.

Capitolo 3

Ricerca del Majorone in MEG

Il Majorone è una particella stabile che non interagisce nel rivelatore, pertanto la ricerca del canale $\mu \rightarrow eJ$ è basata sulla rivelazione del positrone e sulla misura della sua energia.

In questo capitolo descriviamo dapprima il modello dello spettro per il segnale e per il fondo, definendo i parametri di fit e presentiamo un'introduzione all'approccio statistico adottato in questa ricerca, nonché un test preliminare dell'approccio stesso, basato su eventi simulati (toy Monte Carlo).

Successivamente descriviamo la scelta del campione di dati e da questo estrapoliamo il numero di eventi di fondo atteso tramite un'analisi blind. Infine definiamo la misura del fattore di normalizzazione, necessario all'estrapolazione del Branching Ratio.

3.1 Segnale e fondo

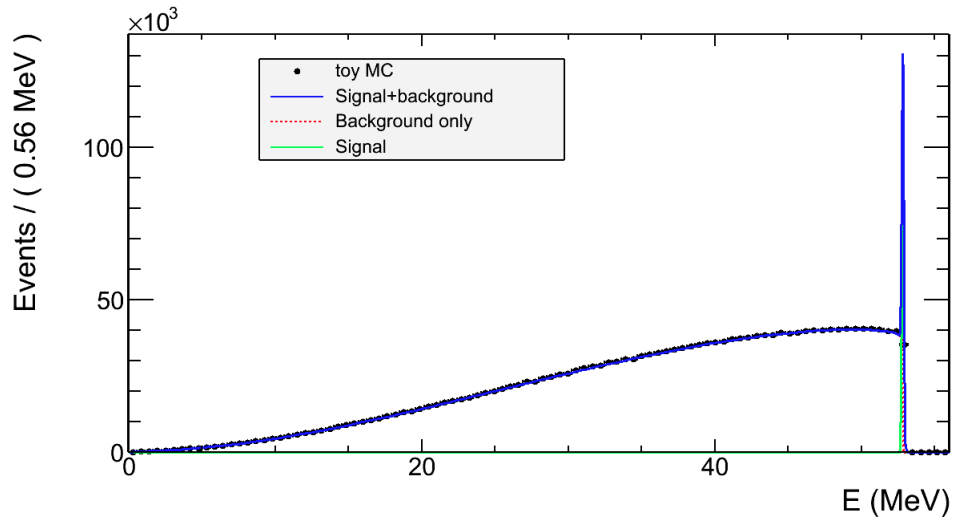


Figura 3.1: Spettro in energia del positrone emesso nel decadimento del muone, in presenza di segnale $\mu \rightarrow eJ$ con $BR = 10^{-2}$.

Nel modello descritto nel Capitolo 1 il Majorone è presentato come una particella a massa

nulla ($M_J = 0$) e stabile. Di conseguenza l'unico segnale di un eventuale decadimento $\mu \rightarrow eJ$, essendo un decadimento a due corpi in cui trascuriamo la massa del positrone, proviene da un positrone monocromatico in corrispondenza del limite cinematico del decadimento di Michel ($E_p = 52.83 \text{ MeV}$), Figura 3.1.

Il fondo per il decadimento $\mu \rightarrow eJ$ è quindi costituito dai positroni provenienti dal decadimento $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$, in cui i neutrini possiedono un'impulso molto basso. Di conseguenza buona parte di questa tesi è dedicata allo studio dello spettro di Michel.

Per confronto nel caso del canale $\mu \rightarrow e\gamma$ il fondo è invece costituito da :

- eventi $\mu \rightarrow e\bar{\nu}\nu\gamma$ in cui il fotone e il positrone sono emessi con un angolo relativo di circa 180° , detti fondo fisico o correlato
- coincidenze casuali tra positroni e fotoni all'interno della finestra di segnale opportunamente definita.

3.2 Il modello

In questa sezione vogliamo definire un modello in grado di descrivere il campione di dati da cui stimare la frazione eventi di segnale. A tale scopo utilizziamo un fit di massima verosimiglianza sui dati generati nel toy Monte Carlo. Gli strumenti di calcolo e il modello dello spettro in energia sviluppati dalla collaborazione di MEG sono stati riadattati alla ricerca del canale $\mu \rightarrow eJ$.

3.2.1 Spettro teorico del positrone di Michel

Lo spettro del positrone di Michel proveniente dal canale $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ è descritto dalla 1.14. Tuttavia per arrivare a definire la funzione che riproduca i nostri dati dobbiamo considerare anche gli effetti delle correzioni radiative, dell'accettanza in energia del rivelatore e gli effetti di risoluzione nella ricostruzione dell'energia del positrone. Di conseguenza è necessario avere una buona conoscenza della funzione di accettanza in energia del rivelatore e della funzione di risoluzione.

La forma dello spettro di Michel è conosciuta dagli anni '50, quando fu formulata la teoria effettiva di Fermi del decadimento debole [18]. Senza le correzioni radiative lo spettro di Michel per muoni positivi polarizzati si scrive:

$$\frac{d\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})}{dx d\cos\theta} \propto [3 - 2x - \cos\theta(1 - 2x)] x^2, \quad (3.1)$$

con $x = \frac{2E}{m_\mu}$, dove E è l'energia del positrone e θ l'angolo fra la direzione del positrone e l'asse di polarizzazione. Se il fascio di muoni è solo parzialmente polarizzato, il termine in $\cos\theta$ va moltiplicato per la frazione di polarizzazione P_μ . Questa dipendenza sparisce se integriamo in $\cos\theta$ in un intervallo simmetrico attorno a $\cos\theta = 0$, come quello coperto dallo spettrometro di MEG, ottenendo:

$$\frac{d\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})}{dx} \propto (3 - 2x)x^2. \quad (3.2)$$

Includendo le correzioni radiative otteniamo (Figura 3.2):

$$P_{theo}(E) \propto \frac{d\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})}{dx} \propto (3 - 2x + \frac{\alpha}{2\pi}f(x))x^2, \quad (3.3)$$

con $f(x)$ data in [2].

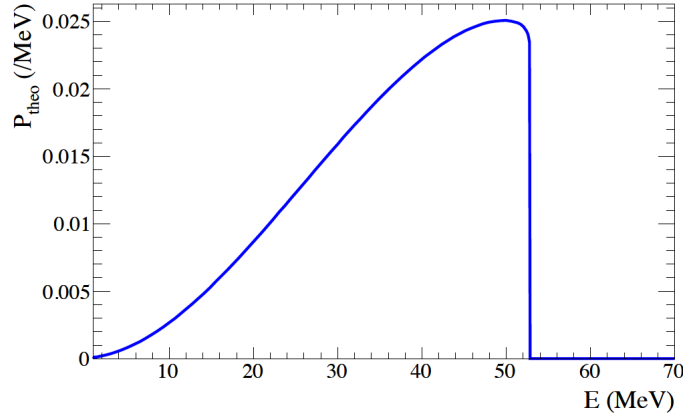


Figura 3.2: Spettro di Michel con correzioni radiative.

3.2.2 Effetti di accettazione e risoluzione in energia

Come abbiamo visto nella sezione 2.1 il rivelatore di positroni, per la sua configurazione magnetica e spaziale, rivela solamente positroni di alto impulso. Un altro effetto interviene quando consideriamo i dati del trigger MEG (trigger 0), in quanto la richiesta che il positrone raggiunga il TC costituisce un'ulteriore selezione sull'impulso del positrone.

Questi due effetti producono una dipendenza dall'energia nell'efficienza dello spettrometro, che possiamo descrivere con la seguente funzione:

$$\varepsilon(E) = \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{E - \mu_{acc}}{\sqrt{2}\sigma_{acc}}\right)}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{E - \mu_{acc}}{\sqrt{2}\sigma_{acc}}} e^{-t^2} dt, \quad (3.4)$$

dove μ_{acc} e σ_{acc} , rispettivamente la media e la sigma di una gaussiana, sono parametri estratti dai dati (o dal Monte Carlo). Per ottenere lo spettro corretto bisogna moltiplicare l'Eq. 3.3 per l'Eq. 3.4. In figura 3.3 è riportato lo spettro risultante definito da:

$$P_{theo}(E) \times \varepsilon(E) \quad (3.5)$$

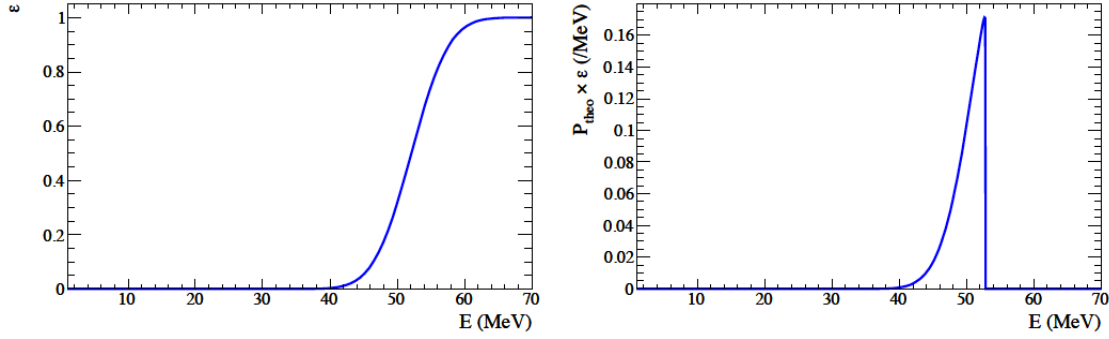


Figura 3.3: Funzione di accettazione in energia (sinistra). Spettro corretto (destra)

Per arrivare alla formulazione finale dello spettro del positrone di Michel dobbiamo tenere in conto anche gli effetti introdotti dalla risoluzione sulla misura di energia. Quello che si fa è convolvere lo spettro atteso con una funzione $R(E - E')$, che rappresenta la probabilità che un positrone di energia vera E sia ricostruito con energia E' .

Come vedremo nel prossimo capitolo, i risultati del Monte Carlo suggeriscono che la $R(E - E')$ sia la somma di tre gaussiane i cui parametri saranno descritti più avanti. La PDF finale si scrive quindi:

$$P(E) = (P_{theo}(E) \times \varepsilon(E)) \otimes R(E) = \int_0^{\frac{m_\mu}{2}} P_{theo}(E') \times \varepsilon(E') \times R(E - E') dE', \quad (3.6)$$

rappresentata in Figura 3.4. Il segnale è invece modellato da una delta di Dirac, centrata in $E = \frac{m_\mu}{2}$ convoluta con la $R(E - E')$, in Figura 3.4.

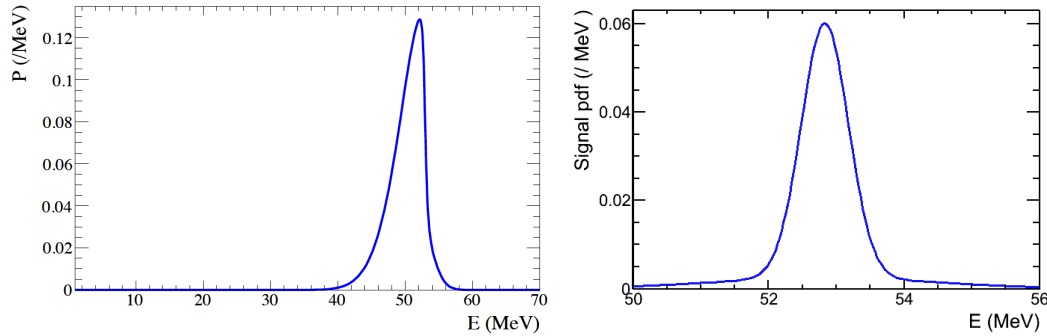


Figura 3.4: Forma finale dello spettro ricostruito del decadimento $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ (sinistra). PDF di segnale (destra)

1. In definitiva i parametri del modello sono i seguenti:
2. Parametri dello spettro di Michel teorico
 - (a) P_μ , polarizzazione del muone
 - (b) m_μ , massa del muone

3. Parametri della funzione di accettazione in energia
 - (a) μ_{acc} , media della funzione di accettazione in energia
 - (b) σ_{acc} , deviazione standard della funzione di accettazione in energia
4. Parametri della funzione di risoluzione, definita come somma di tre gaussiane: “core”, “tail”, “out”
 - (a) μ_{core} , media della gaussiana “core”
 - (b) σ_{core} , deviazione standard della gaussiana “core”
 - (c) μ_{tail} , media della gaussiana “tail” (ha lo stesso valore di μ_{core})
 - (d) σ_{tail} , deviazione standard della gaussiana “tail”
 - (e) μ_{out} , media della gaussiana “out”
 - (f) σ_{out} , deviazione standard della gaussiana “out”
 - (g) f_{core} , frazione della gaussiana “core”
 - (h) f_{out} , frazione della gaussiana “out”

3.3 Test del modello

Utilizziamo un fit di massima verosimiglianza, in cui la funzione di verosimiglianza che descrive il nostro campione di dati è una “likelihood estesa” con frazioni $\frac{N_{sig}}{N}$ e $\frac{N_{bkg}}{N}$, rispettivamente le frazioni del numero di eventi di segnale e del numero di eventi di fondo:

$$L(E, \vec{\alpha}) = \frac{e^{-\nu} \nu^N}{N!} \prod_{i=1}^N \frac{N_{sig} S(E, \vec{\alpha}) + N_{bkg} B(E, \vec{\alpha})}{N_{sig} + N_{bkg}}, \quad (3.7)$$

dove $S(E)$ e $B(E)$ sono rispettivamente la PDF (funzione di densità di probabilità) di segnale e la PDF di fondo, N il numero di eventi generati, $\nu = N_{sig} + N_{bkg}$ il numero di eventi aspettati e $\vec{\alpha}$ il vettore che contiene tutti i parametri. Il modello è quindi costituito da una PDF di segnale e da una PDF di fondo, definite nella sezione 3.2, Figura 3.5. Le fluttuazioni di N_{bkg} e N_{sig} sono tenute in conto dal fattore di Poisson nell’Eq. 3.7.

La likelihood definita in Eq. 3.7 può essere massimizzata rispetto ai suoi parametri, al fine di determinarne la migliore stima (Unbinned Likelihood fit). Una verifica della consistenza statistica di tale procedura può essere effettuata generando eventi casuali in accordo con le PDF di segnale e di fondo (toy MC), ai quali applicare la procedura stessa. Tuttavia data la grande quantità di eventi da analizzare ($O 10^6$) il tempo di fit potrebbe essere molto lungo per il metodo dell’unbinned fit, infatti osserviamo che facendo un solo toy Monte Carlo con soli 10000 eventi di fondo generati, il tempo di fit risulta essere di $122s/evento$, avendo lasciati liberi di variare soltanto due parametri (N_{sig} e N_{bkg}). Dato che l’andamento è lineare per 10^6 di eventi avremmo $1220s$ che, moltiplicato per 300 (numero di toy Monte Carlo necessari per testare il modello), risulta $366000s$ che corrispondono a circa 66 ore, tempo troppo lungo in quanto questa operazione sarà ripetuta anche lasciando liberi di variare un numero maggiore di parametri.

La scelta migliore e allo stesso tempo efficace è l'utilizzo del metodo di binned fit, il cui tempo dipende solamente dal numero M di bin dell'istogramma dei dati. In tal caso la funzione di verosimiglianza si scrive:

$$L(\vec{\alpha}) = \frac{e^{-(N_{sig}+N_{bkg})} (N_{sig} + N_{bkg})^{\sum_b n_b}}{(\sum_b n_b)!} \prod_b \left(\frac{e^{-\nu_b} \nu_b^{n_b}}{n_b!} \right), \quad (3.8)$$

dove n_{sig}^b e n_{bkg}^b sono rispettivamente il numero di eventi di segnale e di fondo misurati nel b -esimo bin, mentre S_b e B_b sono il numero di eventi attesi nel b -esimo bin rispettivamente di segnale e di fondo definiti come:

$$\nu_b = \frac{1}{h} \int_{E_{min}+h \cdot (b-1)}^{E_{min}+h \cdot b} \left[\frac{N_{sig}}{N_{sig} + N_{bkg}} S(E, \vec{\alpha}) + \frac{N_{bkg}}{N_{sig} + N_{bkg}} B(E, \vec{\alpha}) \right] dE, \quad (3.9)$$

con $h = \frac{E_{max}-E_{min}}{M}$ la larghezza di bin.

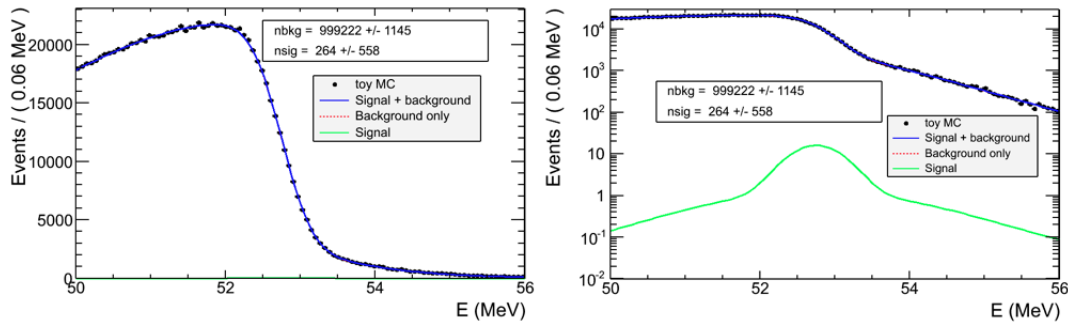


Figure 3.5: Esempio di fit con 1000000 di eventi di fondo generati e 0 di segnale generati (sinistra), e lo stesso in scala logaritmica (destra). In questo esempio, solo N_{bkg} (numero di eventi di fondo) e N_{sig} (numero di eventi di segnale) sono lasciati liberi di variare nella massimizzazione della likelihood.

Osserviamo che, fissato il numero dei parametri liberi di variare, il tempo di fit è di soli 9 secondi in 100 bin per ogni toy Monte Carlo. Lo stesso problema si pone per la generazione di singolo toy MC. Allo stesso modo aggiorniamo il problema generando il campione direttamente sottoforma di istogramma.

Risolti i problemi legati al tempo della CPU, al fine di effettuare un test preliminare della procedura di fit, passiamo al fit di 300 toy MC, lasciando variare solo N_{sig} e N_{bkg} . I parametri di accettazione in energia sono fissati ai valori ottenuti col Monte Carlo, descritti nel capitolo 4, mentre i parametri della risoluzione (tranne gli outliers che sono ottenuti dal Monte Carlo) sono fissati ai valori ottenuti con un metodo indicato come *metodo dei doppi giri*, in Tabella 3.1. Tale metodo consiste nel prendere le tracce che fanno due giri, trattando ogni singolo giro come due tracce indipendenti. Successivamente si va a vedere la differenza tra i parametri delle due tracce in un punto comune. Dal momento che sono la stessa traccia, i parametri (in particolare l'energia del positrone) devono essere gli stessi. Le differenze osservate ci dicono qual è la risoluzione (in particolare, se la risoluzione è una gaussiana larga σ , le differenze saranno distribuite come una gaussiana larga $\sqrt{2}\sigma$).

f_{core}	0.84
μ_{core}	0 MeV
σ_{core}	0.349 MeV
f_{out}	0.07
μ_{out}	0 MeV
σ_{out}	2.0 MeV
μ_{tail}	0 MeV
σ_{tail}	1.46 MeV

Table 3.1: Valori dei parametri della funzione di risoluzione in energia. I parametri core sono stati ricavati con il metodo dei doppi giri, mentre gli outliers dal Monte Carlo completo dell'esperimento.

Partendo da valori iniziali $N_{bkg}^{true} = 1000000$ e $N_{sig}^{true} = 0$, per ogni toy MC determiniamo:

1. la distribuzione dei valori di fit dei due parametri (Figura 3.6)
2. la distribuzione dei pull di N_{sig} , definiti come $\frac{N_{sig} - N_{sig}^{true}}{\Delta N_{sig}}$, dove ΔN_{sig} è l'errore statistico su N_{sig} , stimato dal fit (Figura 3.7)
3. la distribuzione dei pull di N_{bkg} , definiti come $\frac{N_{bkg} - N_{bkg}^{true}}{\Delta N_{bkg}}$, dove ΔN_{bkg} è l'errore statistico su N_{bkg} , stimato dal fit (Figura 3.7)

Con alta statistica una buona convergenza dei fit per ogni toy MC si ritrova nella gaussianità dei pull. Guardando la Figura 3.7 notiamo che i pull sono gaussiani come atteso. Se i pull non fossero gaussiani si avrebbe che i fit convergessero in minimi locali dando dei valori dei parametri lontani da quelli attesi.

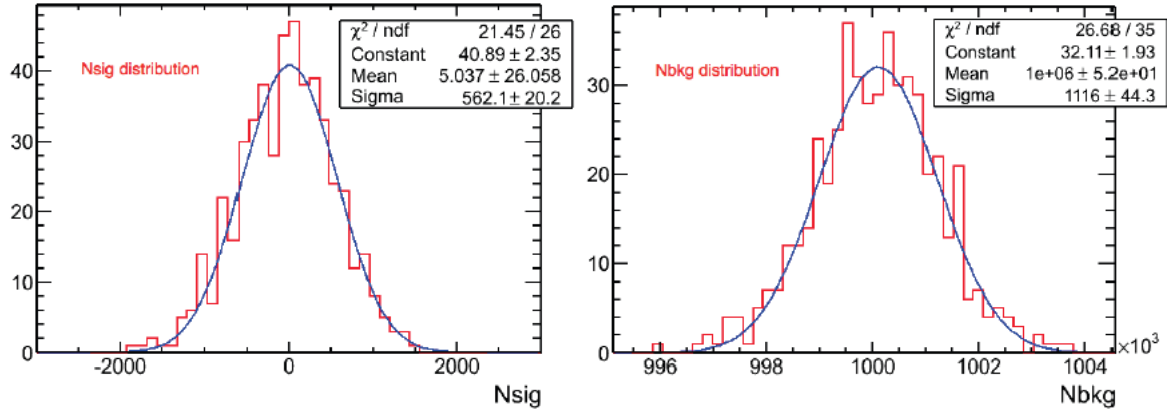
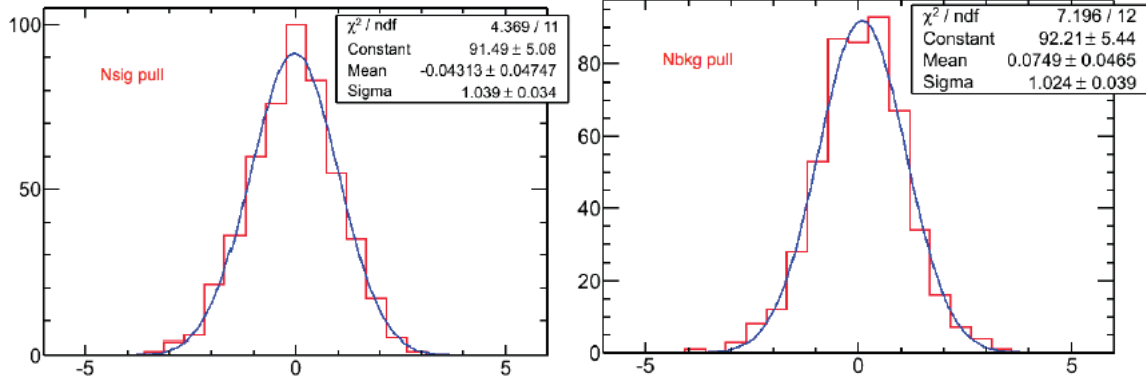


Figura 3.6: Distribuzione di N_{sig} (sinistra). Distribuzione di N_{bkg} destra

Figura 3.7: Pull di N_{sig} (sinistra). Pull di N_{bkg} (sinistra)

3.4 Campione di dati

In questa sezione definiamo il campione di dati sul quale faremo il fit finale per estrarre il limite superiore sul Branching Ratio. Per la stima del numero degli eventi di fondo attesi utilizziamo una analisi blind, che consiste nella estrapolazione del numero di eventi di fondo studiando lo spettro in due intervalli energetici (*sidebands*) esterni alla regione di segnale opportunamente definita.

3.4.1 Selezione degli eventi

Per questo studio utilizziamo una porzione degli eventi del trigger MEG del 2009, che corrispondono a una selezione ottimizzata per la ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$ [19]. Su questi dati operiamo una selezione nella variabile $T_{e\gamma}$ (Figura 3.8), scartando gli eventi per cui $-0.5 \text{ ns} < T_{e\gamma} < 0.5 \text{ ns}$, al fine di ridurre una frazione di eventi radiativi, selezionati dal trigger 0, che potrebbero distorcere lo spettro di Michel. Nel capitolo 5 daremo una prima stima della sensibilità su $\mu \rightarrow eJ$ utilizzando tutti gli eventi del trigger 0 del 2009, che corrispondono al triplo della statistica utilizzata in questa sezione. I criteri di selezione della traccia del positrone sono riportati nell'appendice A.

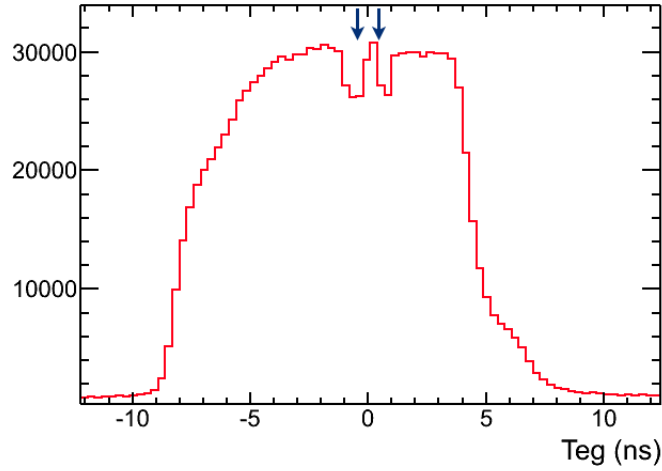


Figura 3.8: Istogramma di $T_{e\gamma}$ con il taglio indicato dalle freccette blu.

Nella sezione 2.5 abbiamo visto che oltre al trigger 0 vi sono altre mask di trigger, in particolare il trigger 22 ha come unica richiesta che vi sia un segnale sopra soglia in una barra del TC. Gli eventi del trigger 22 sarebbero quindi più indicati per la ricerca del Majorone, non essendo affetti da distorsioni nelle distribuzioni cinematiche che, come vedremo, sono introdotte dalle richieste del trigger 0. Tuttavia solo una frazione (10^{-7}) degli eventi del trigger 22 viene registrata su disco, sufficiente a raggiungere una sensibilità significativa su $\mu \rightarrow e\gamma$. Di conseguenza non ne abbiamo un numero significativo

3.4.2 Stima del fondo atteso

Come già detto al fine di non essere influenzati nella stima degli eventi di fondo dalla eventuale presenza di segnale, studiamo lo spettro in due regioni esterne a quella di segnale, dette sideband.

La larghezza della regione blind nello spettro in energia del positrone deve essere tale per cui nelle sideband ci sia il minor numero possibile di eventi di segnale e, al contempo, la statistica non venga ridotta drasticamente. A tale scopo definiamo diversi valori della larghezza della regione di segnale e per ognuno di questi:

1. Calcoliamo la frazione della PDF di segnale nella regione di segnale N_{sig}^{SR}
2. Calcoliamo la frazione della PDF di segnale nelle sideband N_{sig}^{SB}
3. richiediamo che $R_{sig} = \frac{N_{sig}^{SB}}{N_{sig}^{SR}} \times 100 \leq 10\%$

Dalla Figura 3.9 è evidente che il terzo punto è soddisfatto per una larghezza maggiore di 1.8 MeV, quindi otteniamo tre regioni:

- la prima sideband (SB1) $50\text{MeV} < E < 51.9\text{MeV}$
- la regione di segnale (SR) $51.9\text{MeV} < E < 53.7\text{MeV}$

- la seconda sideband (SB2) $53.7\text{MeV} < E < 56\text{MeV}$

In Figura 3.10 è invece mostrato lo spettro in energia dopo la definizione della regione blind.

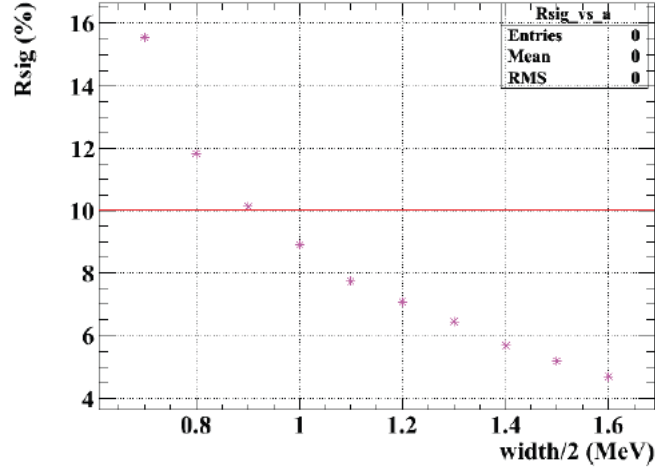


Figura 3.9: R_{sig} in funzione della semi larghezza della regione blind

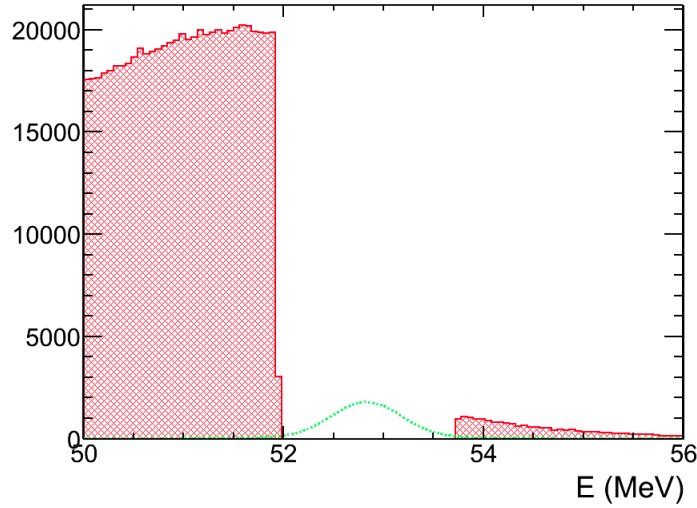


Figura 3.10: Spettro in energia dopo la definizione della regione blind. In verde sono rappresentate le sideband, mentre in blu la PDF di segnale con normalizzazione arbitraria.

Successivamente definiamo la procedura per estrarre il numero di eventi di fondo attesi su tutto lo spettro:

- Calcoliamo separatamente il valore dell'integrale nelle due sideband, I_{SB1} , I_{SB2}
- Calcoliamo l'integrale della PDF di fondo (stima preliminare) su tutto il range, I
- Conoscendo il numero di eventi nelle sideband, misuriamo il numero di eventi di fondo nell'intero spettro come $N = N_{SB} \frac{I}{I_{SB1} + I_{SB2}}$.

Il valore stimato dai vari fit è $N \simeq 9 \cdot 10^5$. Quindi se, come detto in precedenza, consideriamo tutti i trigger 0 del 2009 dovremmo ottenere $N \simeq 2.7 \cdot 10^6$. Utilizzeremo questo numero nel capitolo 5 quando daremo una prima stima della sensibilità sul $\mu \rightarrow eJ$.

3.5 Normalizzazione

Il numero di eventi di fondo atteso è necessario per determinare il valore del limite superiore sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$. Infatti possiamo scrivere:

$$BR(\mu \rightarrow eJ) = \frac{N_{sig}}{N_{tot}}, \quad (3.10)$$

dove con N_{sig} e N_{tot} indichiamo rispettivamente il numero di eventi di segnale e il numero di eventi totali corrispondenti a tutti i muoni decaduti sulla targhetta. Tuttavia dato che il numero di eventi di Michel, N_{bkg} , costituisce 99.9 % di dei decadimenti totali, possiamo sostituirlo ad N_{tot} . Inoltre dobbiamo considerare le efficienze per il segnale, ϵ_{sig} , e per il fondo, ϵ_{bkg} . Sapendo che:

$$N_{sig}^{obs} = N_{sig} \times \epsilon_{sig} \quad (3.11)$$

e

$$N_{bkg}^{obs} = N_{bkg} \times \epsilon_{bkg}, \quad (3.12)$$

possiamo scrivere:

$$BR(\mu \rightarrow eJ) = \frac{N_{sig}^{obs}}{N_{bkg}^{obs}} \times \frac{\epsilon_{bkg}}{\epsilon_{sig}} = f \times \frac{N_{sig}^{obs}}{N_{bkg}^{obs}}, \quad (3.13)$$

dove il fattore f può essere scomposto nel modo seguente:

$$f = \frac{\langle \varepsilon(E_{true}) \rangle_{bkg}}{\langle \varepsilon(E_{true}) \rangle_{sig}} \times \frac{\epsilon_{bkg}^{(50,56)}}{\epsilon_{sig}^{(50,56)}}, \quad (3.14)$$

dove $\varepsilon(E_{true})$ è una efficienza funzione dell'energia (accettanza in energia), la cui forma è ricavata dai dati. Dato che il segnale è monoenergetico $\langle \varepsilon(E_{true}) \rangle_{sig} = \varepsilon(\frac{m_\mu}{2})_{sig} \equiv \varepsilon_0$.

In più in ottima approssimazione $\epsilon_{sig}^{(50,56)} = 1$. Con $\epsilon_{bkg}^{(50,56)}$ indichiamo l'efficienza per il fondo nell'intervallo $50 \text{ MeV} < E < 56 \text{ MeV}$. Otteniamo infine:

$$f = \frac{\langle \varepsilon(E_{true}) \rangle_{bkg}}{\varepsilon_0} \times \epsilon_{bkg}^{(50,56)}. \quad (3.15)$$

Per stimare il valore di f procediamo in questo modo:

1. Generiamo N_{gen} eventi distribuiti secondo lo spettro di Michel teorico;
2. Ogni evento è accettato con una probabilità $\frac{\varepsilon(E_{true})_{bkg}}{\varepsilon_0}$;

3. Ad ogni valore di energia aggiungiamo una distorsione distribuita secondo la funzione di risoluzione in energia
4. Contiamo il numero di eventi tra 50 e 56 MeV , N_{acc} ;
5. Determiniamo il fattore $f = \frac{N_{acc}}{N_{gen}}$.

Con $N_{gen} = 10^7$ e con una stima preliminare dei parametri della funzione di risoluzione e di accettazione, otteniamo:

$$f = 0.0856 \pm 0.0009. \quad (3.16)$$

L'errore su f è dominato dalla sistematica, che sarà discussa nel Capitolo 5, quando verrà data una stima finale del fattore di normalizzazione.

Capitolo 4

Stima dei parametri del modello

In questo capitolo procederemo alla determinazione di alcuni dei parametri descritti nel capitolo 3, preoccupandoci anche di studiarne l'andamento in funzione degli angoli θ e ϕ , allo scopo di trovare eventuali disuniformità nella risposta del rivelatore.

4.1 Studio dei parametri di accettazione in energia

In questa sezione ricaveremo i parametri della funzione di accettazione in energia utilizzando un metodo basato sui dati e uno basato su una simulazione Monte Carlo. Tuttavia è possibile ricavare una stima degli stessi parametri con un metodo del χ^2 che, poichè non ha portato ad un buon risultato, è descritto in Appendice C.

4.1.1 Accettazione in energia ricavata dal Monte Carlo

Lo spettro in energia senza gli effetti della risoluzione, è definito dall'Eq (3.5). Di conseguenza possiamo risalire alla funzione di accettazione in energia, e quindi stimarne i parametri μ_{acc} e σ_{acc} , usando la seguente procedura:

1. Determiniamo dal MC la distribuzione del valore generato dell'energia, per i soli eventi ricostruiti e selezionati, in Figura 4.1 (sinistra)
2. Determiniamo dalla teoria lo spettro atteso, in Figura 4.1 (destra)
3. Determiniamo la funzione di accettazione, facendo il rapporto fra le precedenti distribuzioni, in Figura 4.2
4. Ricaviamo μ_{acc} e σ_{acc} facendo il fit della distribuzione ottenuta con l'Eq (3.4)

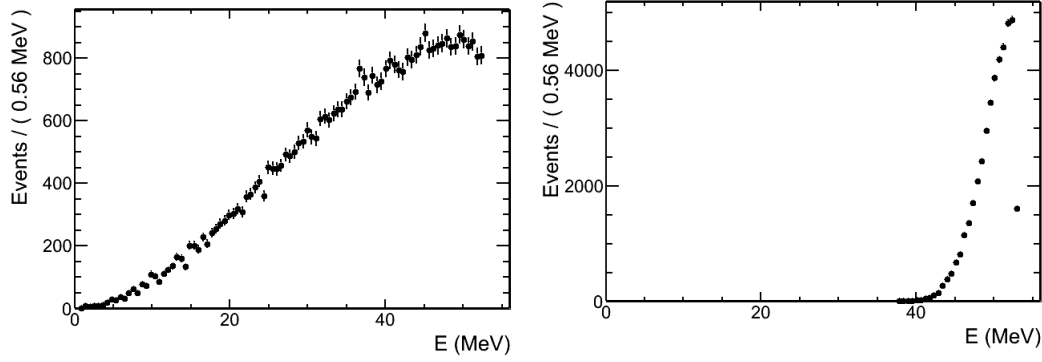


Figura 4.1: Eventi generati secondo spettro di Michel teorico (sinistra). Eventi generati secondo la 3.5 (destra).

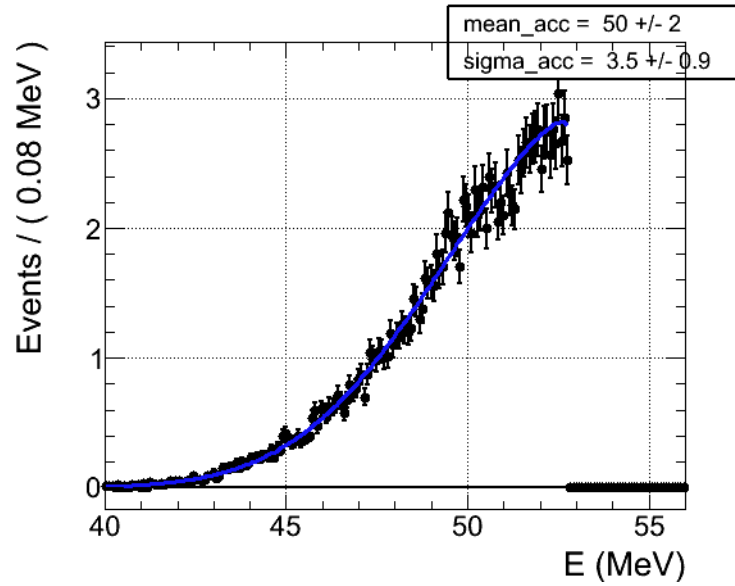


Figura 4.2: Distribuzione del rapporto tra il plot in Figura 4.9, fittata con la 3.4.

Dalla Figura 4.2 notiamo che per questa procedura dobbiamo considerare il range $40\text{MeV} < E < 52.8\text{MeV}$, per ricavare i parametri dal fit.

4.1.2 Metodo Bayesiano

Dato un insieme di alternative possibili $A_1, A_2, \dots, A_N$ il teorema di Bayes afferma che :

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_i^N P(E|A_i)P(A_i)}, \quad (4.1)$$

dove $P(A_i)$ è la probabilità a priori su A_i (prior), ottenuta senza alcuna informazione su E ; $P(A_i|E)$ è la probabilità a posteriori su A_i (posterior), condizionata da E ; mentre $P(E|A_i)$ è la probabilità di E noto A . Nel nostro caso l'insieme E corrisponde ai i dati, mentre

l'alternativa A_i corrisponde con i valori (continui) di μ_{acc} e σ_{acc} . Le distribuzioni a priori sui due parametri le assumiamo indipendenti fra loro e uniformi.

L'idea di un metodo basato su un approccio Bayesiano, è costruire le posterior di μ_{acc} e σ_{acc} . A tal fine, è necessario costruire una posterior per tutti i parametri ignoti del modello, per poi integrarla rispetto a tutti i parametri eccetto μ_{acc} e σ_{acc} .

- Definiamo le prior dei parametri μ , σ , σ_{tail} , $frac_{core}$, μ_{acc} e σ_{acc} , come distribuzioni uniformi tra un valore massimo e un valore minimo¹
- Determiniamo la posterior su μ_{acc} e σ_{acc} in questo modo

$$P(\mu_{acc}, \sigma_{acc} | Dati) = N \int L(Dati | \mu_{acc}, \sigma_{acc}, \vec{\alpha}) P(\vec{\alpha}) d\vec{\alpha} P(\mu_{acc}) P(\sigma_{acc}) \quad (4.2)$$

dove con $\vec{\alpha}$ vogliamo indicare il vettore le cui componenti sono gli altri parametri e con N un fattore di normalizzazione. L'integrale in Eq 4.1, che rappresenta la proiezione della posterior sui parametri da stimare, è risolto numericamente. Questo metodo richiede un largo impiego del tempo della CPU (20 giorni per avere 10^6 di generazioni), problema risolto attraverso la parallelizzazione di diversi 10 job ognuno con 100000 valori da generare per ogni parametro. In Figura 4.3 sono riportate le proiezioni del plot in figura 4.4 sull'asse μ_{acc} e sull'asse σ_{acc} . I valori stimati per i parametri della funzione di accettazione in energia sono quindi:

$$\mu_{acc} = 49.23 \pm 0.11 \text{ MeV},$$

$$\sigma_{acc} = 3.65 \pm 0.03 \text{ MeV}.$$

Come si può notare in Figura 4.5, questi presentano anche una certa correlazione che terremo in conto nella trattazione della sistematica nel Capitolo 5.

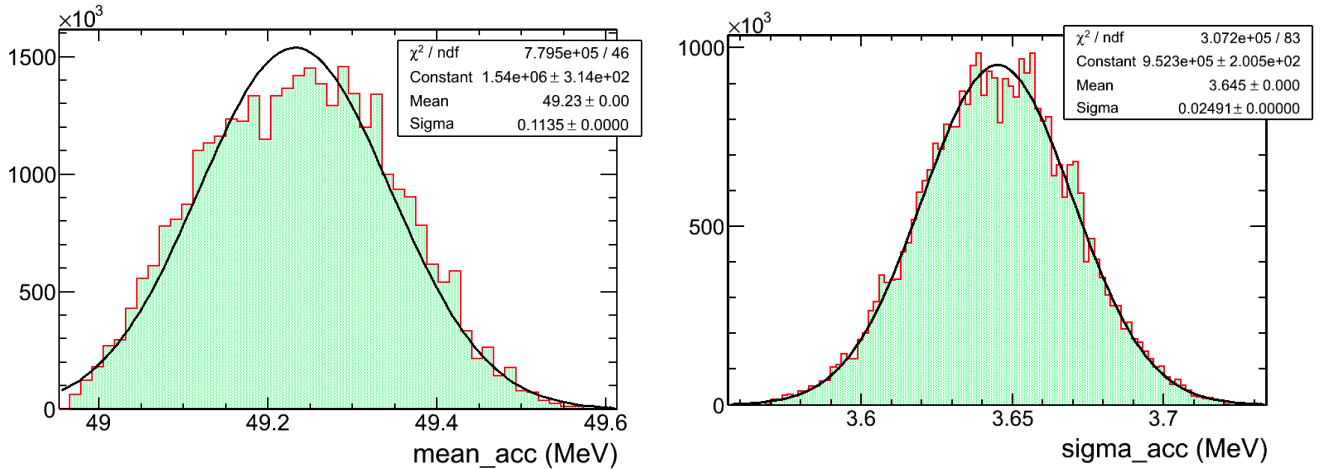
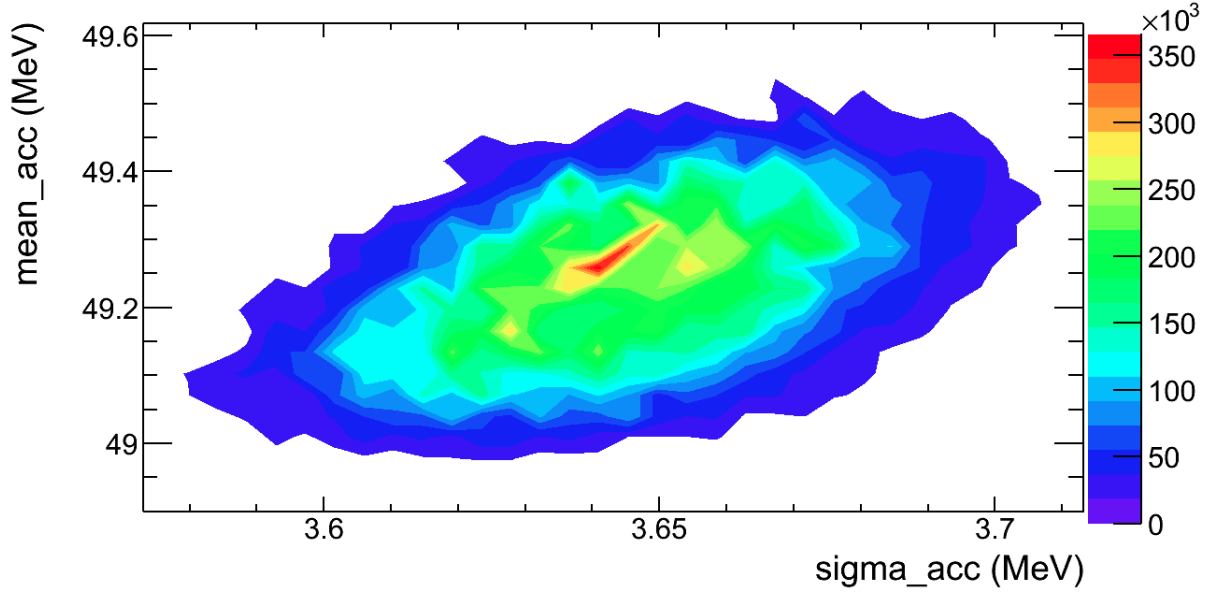


Figura 4.3: Posterior di μ_{acc} (sinistra). Posterior di σ_{acc} (destra)

¹La determinazione del valore massimo e del valore minimo viene ottenuta dagli istogrammi dei parametri ottenuti con i toy MC e in parte da questo stesso studio, verificando che un allargamento degli intervalli non determina un cambiamento dei risultati.

Figura 4.4: Proiezione della Posterior nel piano $\mu_{acc} \sigma_{acc}$

4.2 Accettanza angolare

L'Eq. (1.26) ci fornisce la distribuzione angolare del segnale mentre l'Eq. (3.4) non integrata in $\cos \theta$ ci dà la distribuzione angolare del positrone di Michel. Di seguito riproponiamo le larghezze di decadimento rispettivamente di segnale e di Michel, assumendo massima polarizzazione del muone ($P_\mu = 1$):

$$\frac{d\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ J)}{dx d\cos \theta} \propto (1 - \cos \theta), \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Gamma(\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e)}{dx d\cos \theta} \propto \left[3 - 2x - \cos \theta (1 - 2x) + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) \right] x^2. \quad (4.4)$$

L'Eq. (4.4) giustifica l'asimmetria upstream downstream osservata nei decadimenti di Michel, preferendo la regione upstream del rivelatore, in Figura 4.5.

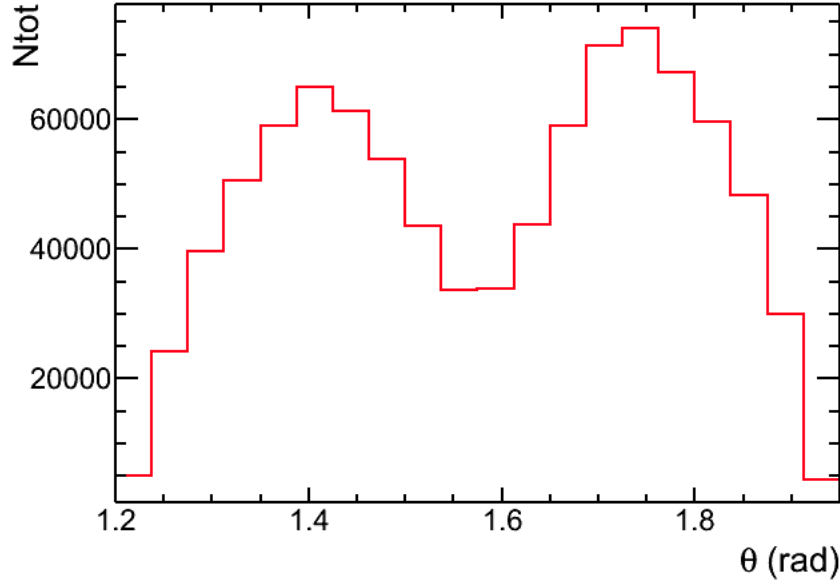


Figura 4.5: Distribuzione angolare del positrone riferita ai dati del 2009. L'istogramma è costruito su 20 bin di θ

Fino ad ora non ci siamo preoccupati degli effetti dell'accettanza angolare dell'apparato sperimentale, ma abbiamo eliminato la dipendenza da θ integrando su di un intervallo simmetrico attorno a $\cos \theta$. Tuttavia un' accettanza angolare asimmetrica in $\cos \theta$ introdurrebbe un contributo diverso da zero nell'equazione dello spettro.

Definita $\varepsilon(\cos \theta)$ l'accettanza angolare, la pdf totale si scrive:

$$\varepsilon(\cos \theta) \left[\frac{N_s S(E, \cos \theta) + N_b B(E, \cos \theta)}{N_s + N_b} \right], \quad (4.5)$$

integrando in un intervallo simmetrico in $\cos \theta$, l'Eq (4.3) l'Eq (4.4) otteniamo :

$$\int_{-1}^1 \varepsilon(\cos \theta) (1 - \cos \theta) d\cos \theta \quad (4.6)$$

per il segnale e,

$$\int_{-1}^1 \varepsilon(\cos \theta) \left[3 - 2x - \cos \theta (1 - 2x) + \frac{\alpha}{2\pi} f(x) \right] x^2 d\cos \theta. \quad (4.7)$$

Notiamo che gli unici integrali da risolvere sono:

$$A_1 = \int_{-1}^1 \varepsilon(\cos \theta) d\cos \theta \quad (4.8)$$

e

$$A_2 = \int_{-1}^1 \varepsilon(\cos \theta) \times \cos \theta d\cos \theta. \quad (4.9)$$

Tuttavia se nell'Eq (4.4) raccogliamo A_1 , rimane da calcolare il rapporto $R = \frac{A_1}{A_2}$. In questa sezione quindi ci proponiamo di ricavare la funzione di accettazione angolare e quindi stimare i valori di R .

La funzione $\varepsilon(\cos \theta)$ è ragionevolmente data dal prodotto dell'accettazione di trigger, $\varepsilon_{trg}(\cos \theta)$, per un'accettazione propria del rivelatore, $\varepsilon_{riv}(\cos \theta)$.

4.2.1 Accettazione del rivelatore utilizzando lo scattering Mott

Nella sezione 2.1 abbiamo visto che il numero di positroni presenti nella linea di fascio $\pi E5$ sono circa 20 volte il numero di muoni, di conseguenza modificando opportunamente le impostazioni del separatore è possibile ottenere un fascio di positroni abbastanza intenso ($\sim 10^8 e^+/s$) con una larghezza di impulso abbastanza stretta ($\Delta p < 50 \text{ keV}/c$). L'impulso dei positroni del fascio può essere regolato più alto o più basso rispetto a quello del segnale $\mu \rightarrow e\gamma$, rendendo così possibile uno studio dell'accettazione dello spettrometro [22].

I positroni urtano i nuclei di un bersaglio di carbonio spesso 2 mm (montato al posto del bersaglio MEG) secondo un processo di urto elastico coerente che prende il nome di “scattering Mott”. Regolando il fascio di positroni a un impulso di 50 MeV/c si ottiene una rate sufficientemente alta di positroni monocromatici intorno all'energia di segnale.

La sezione d'urto Mott è conosciuta con alta precisione e, in funzione del momento trasferito al nucleo $Q = 4pp_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, si scrive:

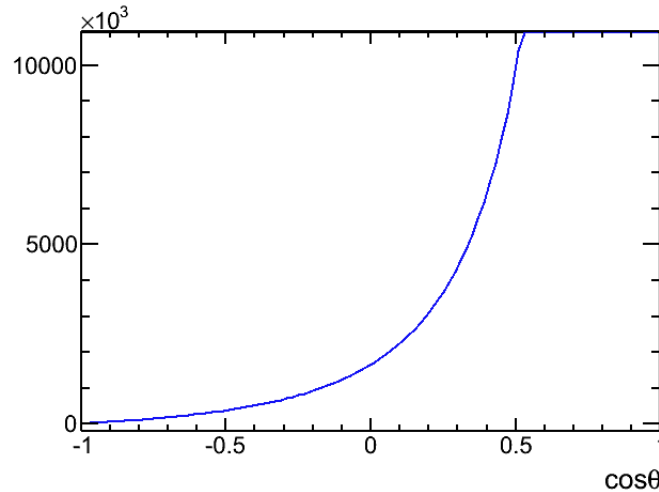
$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2 Z^2}{Q^4} \left(1 - \frac{Q^2}{4p_0^2}\right) |F(Q^2)|^2, \quad (4.10)$$

dove p_0 e p sono rispettivamente l'impulso iniziale e finale del positrone, legati dalla relazione $p = \frac{p_0}{1 + \frac{p_0}{M}(1 - \cos \theta)}$, e $F(Q^2)$ è il fattore di forma nucleare. Con un'opportuna scelta del bersaglio, e quindi del fattore di forma e del numero atomico, è possibile ottenere un urto elastico più o meno coerente all'energia desiderata. Questo metodo permette di studiare, oltre alla risoluzione angolare e in energia, l'accettazione angolare nella regione di energia di segnale.

Manipolando l'Eq (4.10) otteniamo la distribuzione angolare del positrone Mott:

$$N_{Mott}(\cos \theta) \propto \frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{2\pi\alpha Z^2}{p^2(1 - \cos \theta)^2} \left(\frac{p}{2M} \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2M} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{p}{2M} \right), \quad (4.11)$$

graficata in Figura 4.6.

Figura 4.6: Distribuzione del positrone Mott con $p=50$ MeV.

L'accettanza angolare del rivelatore, riportata in Figura 4.7, è calcolata normalizzando il numero degli eventi Mott osservati al numero di eventi Mott dato dall'Eq (4.11) per ogni valore di $\cos\theta$.

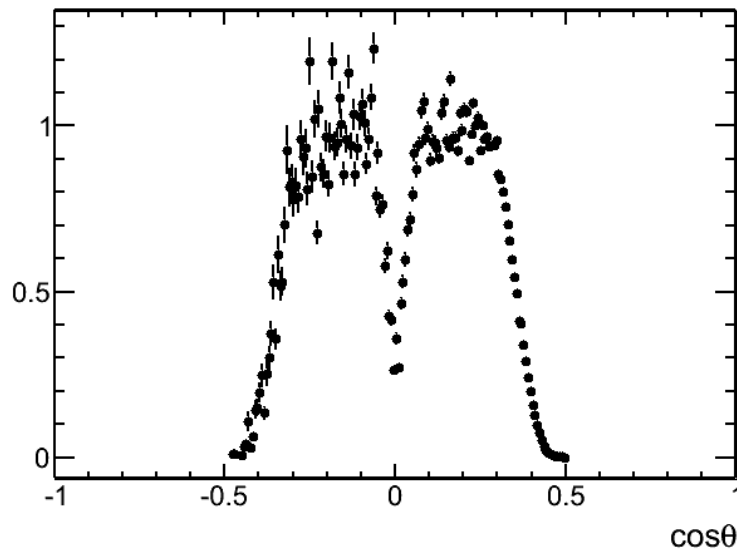


Figura 4.7: Accettanza angolare del rivelatore ottenuta utilizzando gli eventi Mott

4.2.2 Accettanza di trigger

Abbiamo visto nel Capitolo 2 che lo spettrometro di MEG è costruito in maniera tale che solo positroni di alta energia raggiungano il TC. Il trigger 0, a causa delle diverse richieste necessarie alla selezione di eventi tipo $\mu \rightarrow e\gamma$, per parte dei positroni, accettati dal rivelatore, che impattano sul TC, ha una rate più bassa del trigger 22, la cui unica richiesta è che il positrone impatti il timing counter. Quindi l'accettanza angolare del trigger è ottenuta normalizzando il numero di conteggi del trigger 0 al numero di conteggi del trigger 22 per

ogni valore di $\cos\theta$. Le distribuzioni angolari degli eventi di entrambi i trigger sono riportati in Figura 4.8.

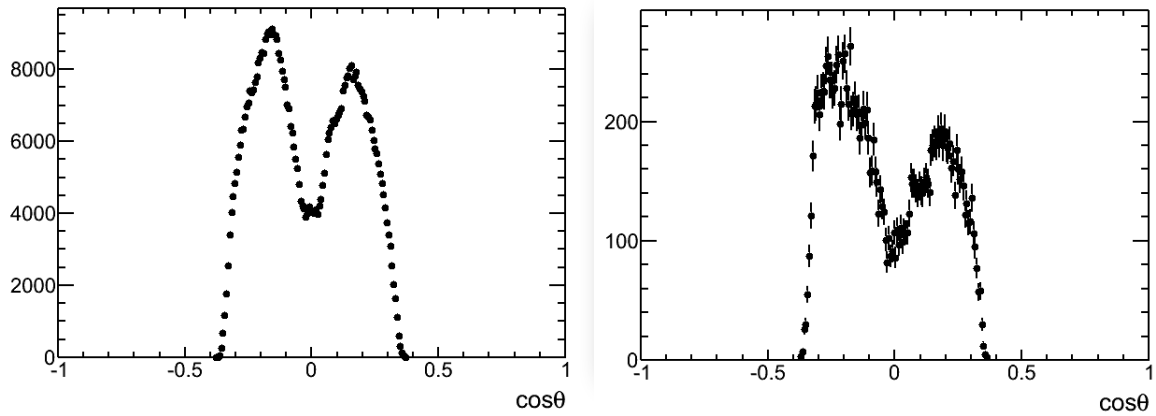


Figura 4.8: Distribuzione angolare degli eventi del trigger 0 (sinistra). Distribuzione angolare del numero di eventi prescalati del trigger 22 (destra)

Quello che otteniamo è il plot in Figura 4.9. L'asimmetria che notiamo può essere spiegata dal fatto che il trigger 0, richiedendo che il fotone e il positrone siano in direzione opposta l'uno all'altro, non copre tutti gli angoli invece coperti dal trigger 22.

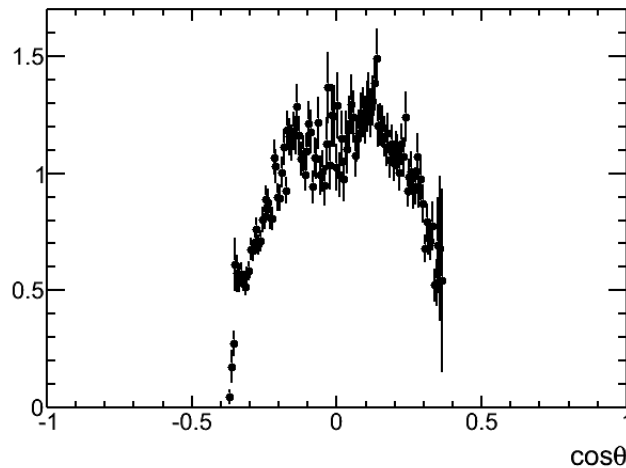


Figura 4.9: Accettanza angolare di trigger

4.2.3 Determinazione dell'accettanza angolare

Il prodotto delle accettanze in figura 4.7 e 4.9 ci dà l'accettanza angolare $\varepsilon(\cos\theta)$, riportata in Figura 4.10. Notiamo una leggera asimmetria che si traduce in un valore di R diverso da 0, in Figura 4.11.

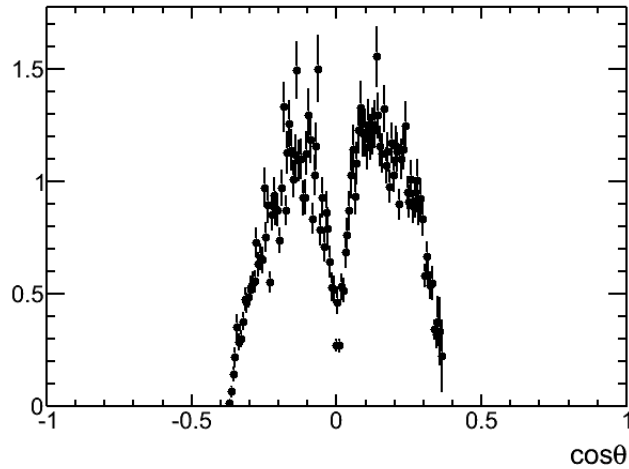


Figura 4.10: Accettanza angolare

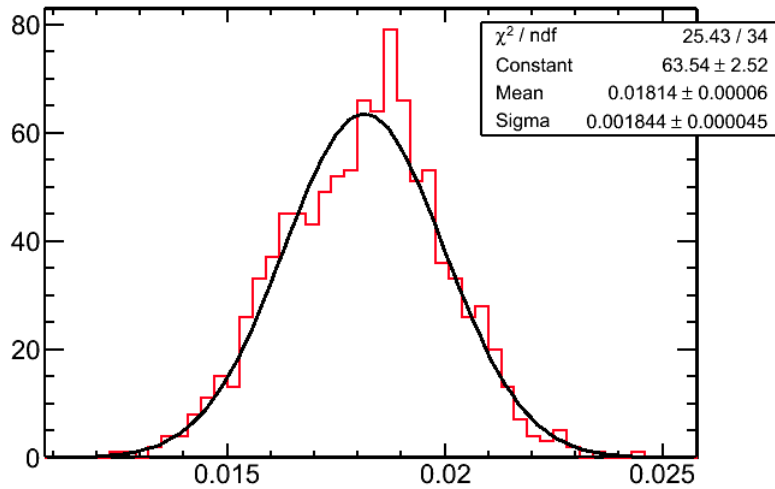


Figura 4.11: Distribuzione dell'integrale R

Al fine di stimare l'errore statistico sul valore del rapporto di integrali $R = \frac{A_1}{A_2}$, costruiamo la distribuzione in Figura 4.11, aggiungendo, per ogni bin di $\cos \theta$ una fluttuazione gaussiana al contenuto del bin e infine sommando su tutti i bin. Il valore ricavato è

$$R = 0.018 \pm 0.002.$$

Questo valore, come vedremo nel capitolo 5, sarà fonte di errore sistematico sul valore di N_{sig} .

4.3 Studio dei parametri della funzione di risoluzione in energia

Un corretto studio dei parametri della funzione di risoluzione è necessario in quanto questa

la troviamo sia nella PDF di segnale che nella PDF di fondo. A tal fine utilizzeremo degli eventi Monte Carlo.

4.3.1 Simulazione Monte Carlo

Gli eventi Monte Carlo che prendiamo in considerazione sono ottenuti con una simulazione di tutto il rivelatore fatta con Geant3 e riproducono solo eventi di Michel, selezionati tramite taglio in impulso attraverso la variabile $x = \frac{E}{2m_\mu}$. In particolare prenderemo un set di eventi contenente anche eventi di “basso” impulso corrispondente a $x > 0.66$, assumendo le camere nella posizione nominale [19]. Gli eventi sono ricostruiti con le stesse procedure usate per i dati.

Per ogni evento definiamo due spettri, in Figura 4.12, di due grandezze: l’energia vera, E_{true} , e l’energia ricostruita del positrone, E_{reco} . Lo spettro di energia vera è quello descritto dall’Eq (3.3) moltiplicata per l’Eq (3.4); mentre lo spettro ricostruito è quello modellato dall’Eq (3.5) che include gli effetti della risoluzione.

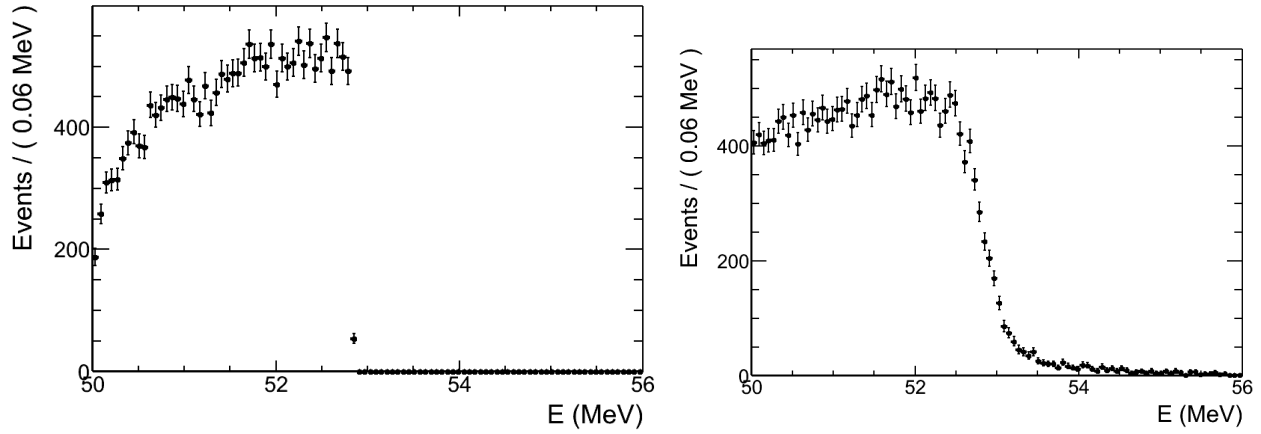


Figura 4.12: Spettro di Michel prima della convoluzione con la funzione in energia (sinistra). Spettro di Michel convoluto con la funzione di risoluzione in energia (destra). I plot si riferiscono a 22616 eventi.

Costruendo lo spettro della variabile $E_{reco} - E_{true}$ otteniamo la distribuzione in Figura 4.13. Per definizione questa coincide con la funzione di risoluzione descritta dalla funzione $R(E - E')$, descritta nel capitolo precedente.

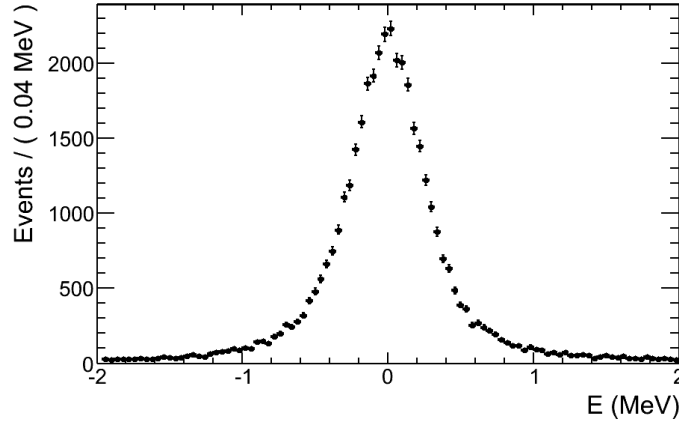


Figura 4.13: Spettro della variabile $E_{reco} - E_{true}$

Al fine di verificare quanto bene la nostra procedura di fit dello spettro ci permette di determinare dal MC la funzione $R(E - E')$, utilizziamo il metodo seguente:

- Facciamo un fit di massima verosimiglianza allo spettro in energia ricostruita del MC lasciando variare μ_{core} , f_{core} , σ_{core} , σ_{tail} , utilizzando come valori di partenza quelli ottenuti con il metodo dei doppi giri.
- Sovrapponiamo la curva della funzione di risoluzione in energia, ottenuta fissando i parametri ai valori ottenuti nel fit sullo spettro, ai punti nel plot in Figura 4.13

In Figura 4.14 possiamo notare che c'è un buon accordo fra la curva blu e i punti. Notiamo che i parametri in Figura 4.14 non sono molto distanti da quelli in Tabella 4.2, in particolare μ è compatibile con 0. Questo studio potrebbe essere interessante per la trattazione delle sistematiche su questi parametri.

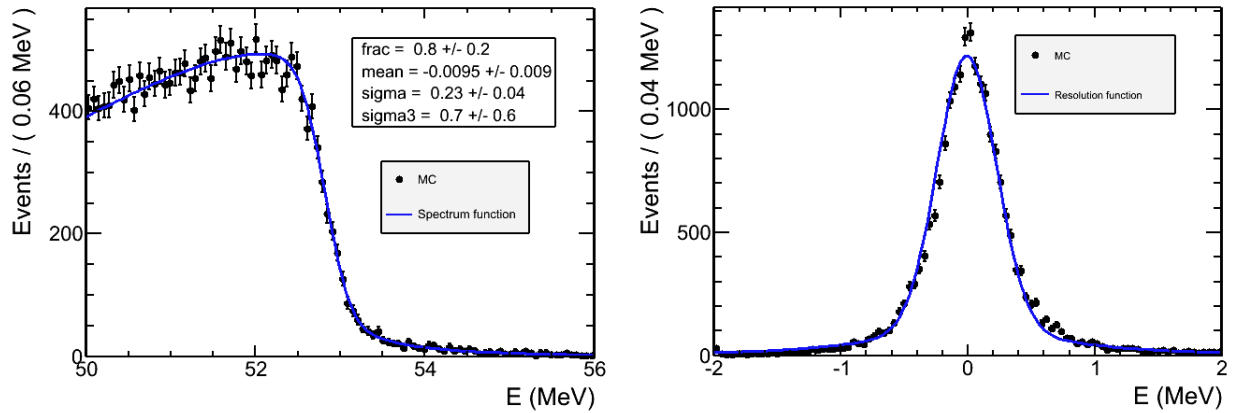


Figura 4.14: Fit sullo spettro con i valori dei parametri (sinistra). Sovrapposizione della funzione di risoluzione (destra). I nomi dei parametri nel plot di sinistra sono quelli usati nel codice e corrispondono: $mean = \mu_{core}$, $sigma = \sigma_{core}$, $frac = f_{core}$, $sigma3 = \sigma_{tail}$.

Capitolo 5

Stima della sensibilità al $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$

Questo capitolo è dedicato all'analisi finale e quindi alla determinazione del $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$. A tale scopo utilizziamo un metodo basato su un approccio Bayesiano descritto nella prima sezione. Definito il metodo, descriveremo nei dettagli la strategia di fit, ricavando poi il valore medio atteso del limite superiore sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$, includendo le principali incertezze sistematiche.

5.1 Limite superiore medio atteso sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$: procedura

Nel paragrafo 4.1.2 abbiamo introdotto un approccio Bayesiano che ci ha permesso di ricavare le posterior sui parametri che volevamo stimare. In questa sezione vogliamo costruire, seguendo lo stesso filo logico, la PDF a posteriori (posterior) su N_{sig} . La PDF a priori ("prior" $P(N_{sig})$) su questo parametro la scelgo come una distribuzione uniforme tra 0 e un valore N_{sig}^{max} , tale che la posterior risulti nulla al di sopra di tale valore. In particolare, si può scegliere $N_{sig}^{true} + 10\sigma_{N_{sig}}$, essendo $N_{sig}^{fit} \pm \sigma_{N_{sig}}$ il risultato del fit di massima verosimiglianza. Notiamo che questa prior permette di eliminare i valori negativi di N_{sig} che, nonostante per questi sia definita la funzione di verosimiglianza, non hanno alcun significato fisico. Scriveremo quindi la posterior su N_{sig} come:

$$P(N_{sig}|Dati) \propto L(Dati|N_{sig}) P(N_{sig}). \quad (5.1)$$

Al fine di stimare la posterior di N_{sig} , sarebbe necessario integrare la likelihood rispetto a tutti i altri parametri del modello a parte N_{sig} . Tuttavia si può mostrare che, nel limite di alta statistica e assumendo prior uniformi, la funzione di verosimiglianza integrata è data da una distribuzione gaussiana in N_{sig} , con media N_{sig}^{fit} e scarto quadratico medio $\sigma_{N_{sig}}$, ottenuti da un fit nel quale la likelihood è massimizzata rispetto a tutti i parametri. La validità di questa assunzione si può verificare dalla gaussianità dei pull nei toy MC.

Infine definito il *probability level* (PL) come una frazione dell'integrale totale della posterior, possiamo definire il limite superiore ad un certo *probability level* come quel valore di N_{sig} tale per cui $\int_0^{N_{sig}} P(N_{sig}|Dati) dN_{sig} = PL$.

Costruiamo la posterior sul $\text{BR}(\mu \rightarrow eJ)$ come:

$$P(\text{BR}|Dati) = \int L(Dati|N_{sig}) P(N_{sig}|\text{BR}) dN_{sig}, \quad (5.2)$$

dove $P(N_{sig}|BR) = \delta(N_{sig} - BR \times f)$, con f il fattore di normalizzazione definito in 3.5.

Al fine di stimare la sensibilità dell'esperimento, generiamo 300 toy Monte Carlo utilizzando il modello di PDF estesa definita in 3.1.2 con $N_{sig}^{true} = 0$ e $N_{bkg}^{true} = 2700000$. Per ogni toy MC:

1. Generiamo 10^6 valori del fattore di normalizzazione, f^{gen} distribuito gaussianamente con $f^{true} = 0.0856$ e $\sigma_f = 0.001$
2. Generiamo 10^6 valori di BR, che chiamiamo BR^{gen} , tra 0 e BR^{max} ,
3. Generiamo 10^6 valori del numero di eventi di fondo, N_{bkg}^{gen} , distribuito uniformemente tra . Questi valori sono simmetrici e distanti circa 10σ dal valore di N_{bkg}^{true} (dove σ è la RMS della distribuzione di N_{bkg} dei toy MC)
4. Calcoliamo 10^6 valori del numero di eventi di segnale, $N_{sig}^{gen} = \frac{N_{bkg}^{gen}}{f^{gen}} BR^{gen}$
5. Riempiamo un istogramma pesato con $w = e^{-\frac{(N_{sig}^{gen} - N_{sig})^2}{2\Delta N_{sig}^2}}$ (assumendo che la funzione di verosimiglianza proiettata su N_{sig} sia gaussiana, come suggerito dai pull in sezione 3.3).
6. Estrapoliamo il limite superiore su N_{sig} rispettivamente al 68% e al 90% del probability level e li inseriamo in un istogramma.
7. Ripetiamo gli ultimi due punti per il Branching Ratio definito come $BR = \frac{N_{sig}^{gen}}{N_{bkg}^{true}} f^{true}$.

Notare che nei punti 2,3,4,5 stiamo definendo le prior, mentre nel punto 6 definiamo la $P(N_{sig}|Dati)$.

5.2 Strategia di fit

Come già detto, possiamo evitare di integrare la likelihood su tutti i parametri a parte N_{sig} (operazione che richiederebbe un tempo di CPU molto grande), facendo un fit in cui la funzione di verosimiglianza è massimizzata rispetto a tutti i parametri..

I fit effettuati sui toy MC lasciando liberi tutti i parametri di risoluzione assieme alle frazioni di eventi di segnale e di fondo, convergono solo nel 5% dei casi. Questo è dovuto a una forte correlazione tra μ_{core} e N_{sig} .

In Figura 5.1 (sinistra) è riportato l'andamento di $-\log(L)$ proiettato nello spazio $N_{sig} \mu_{core}$, relativo a un singolo toy MC. In figura 5.1 (destra) notiamo la forte correlazione fra i due parametri.

Una soluzione possibile è introdurre nella funzione di verosimiglianza un vincolo stringente su μ_{core} . Le calibrazioni fatte utilizzando gli eventi Mott permettono di stimare questo parametro in modo preciso, quindi assegnamo al parametro μ una prior gaussiana centrata in μ_{Mott} , valore di μ_{core} ricavato dai Mott, e di sigma σ_{Mott} , errore su μ ricavato dai Mott:

$$G(\mu_{core}, \mu_{Mott}, \sigma_{Mott}) \propto e^{-\frac{(\mu_{core} - \mu_{Mott})^2}{2\sigma_{Mott}^2}}. \quad (5.3)$$

Di conseguenza il fit dovrà massimizzare la seguente funzione di verosimiglianza:

$$L(E, \vec{\alpha}, \mu_{Mott}, \sigma_{Mott}) = L(E, \vec{\alpha}) \cdot G(\mu, \mu_{Mott}, \sigma_{Mott}), \quad (5.4)$$

dove $L(E, \vec{\alpha})$ è data dall'Eq. (3.8).

La misura di μ_{Mott} si ottiene dalla differenza dell'energia media misurata per i positroni durante la presa dati Mott e l'energia del fascio, correggendo per la perdita di energia subita dai positroni nell'attraversare il bersaglio. Di conseguenza, l'incertezza da associare alla misura di μ_{Mott} è legata alla capacità di simulare sul MC le perdite di energia subite dal positrone nell'attraversare il bersaglio. La perdita di energia media è di circa 200 keV e l'affidabilità tipica delle simulazioni è al livello del percento. Assumiamo quindi un'incertezza σ_{Mott} 10 keV. Abbiamo quindi realizzato dei toy MC sotto queste assunzioni, costruito il pull per N_{sig} , in Figura 5.2, che risulta essere gaussiano, quindi possiamo assumere che la funzione di verosimiglianza proiettata su N_{sig} è gaussiana.

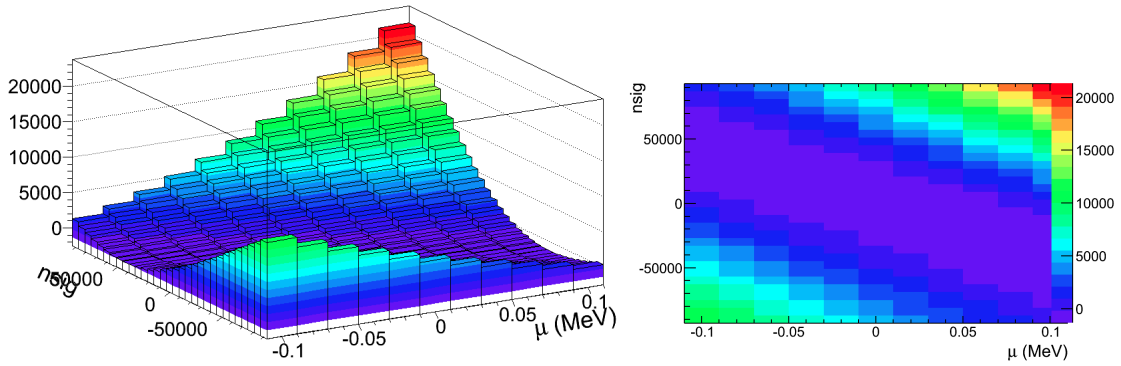


Figura 5.1: Profilo del negative log likelihood in funzione di N_{sig} e μ_{core} (sinistra). Proiezione dello stesso plot sul piano $N_{sig} \mu_{core}$ (destra)

Massimizzando la funzione di verosimiglianza, in un singolo toy MC, rispetto a tutti i parametri escluso N_{sig} , otteniamo, il likelihood profile su N_{sig} :

$$L_{prof}(N_{sig}) = \max(L) |_{\vec{\alpha}} \quad (5.5)$$

Conferma della gaussianità della likelihood proviene dal profilo rispetto a N_{sig} , $L_{prof}(N_{sig})$, il cui logaritmo (in Figura 5.3) ha andamento parabolico. Tale profilo è ottenuto fissando N_{sig} e μ_{core} e massimizzando la funzione di verosimiglianza rispetto a tutti gli altri parametri, ripetendo l'operazione per diversi punti nello spazio N_{sig}, μ_{core} . Questo ci permette di stimare il limite superiore su N_{sig} , e quindi sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$, usando la procedura descritta nella sezione 5.1, lasciando liberi di variare tutti i parametri della risoluzione.

Da Figura 5.5 possiamo anche dare una stima dell'intervallo a 1sigma su N_{sig} per questo specifico toy MC, definito come l'intervallo nel quale $L_{prof}(N_{sig}) < L_{min} + \frac{1}{2} [1]$.

In Figura 5.5 osserviamo il range a 1σ intorno al minimo del profilo:

$$N_{sig}^{min} = -1950 \pm 7600,$$

notiamo che lo 0 è contenuto nel range. Utilizzando la simulazione Monte Carlo completa dell'esperimento, giungiamo a un risultato simile.

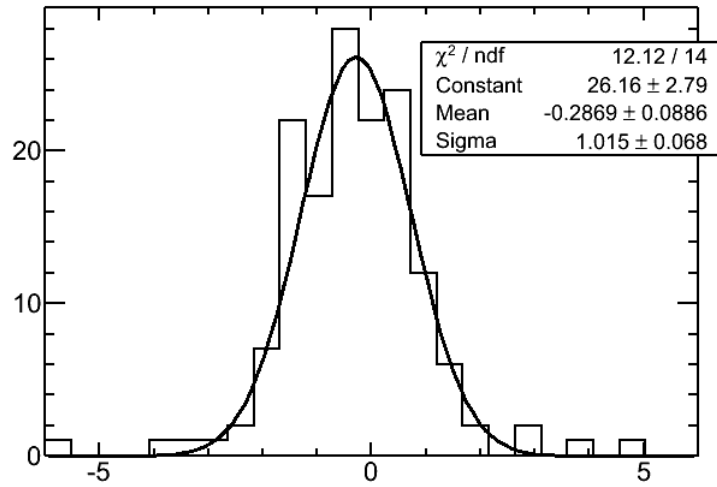


Figura 5.2: Pull di N_{sig}

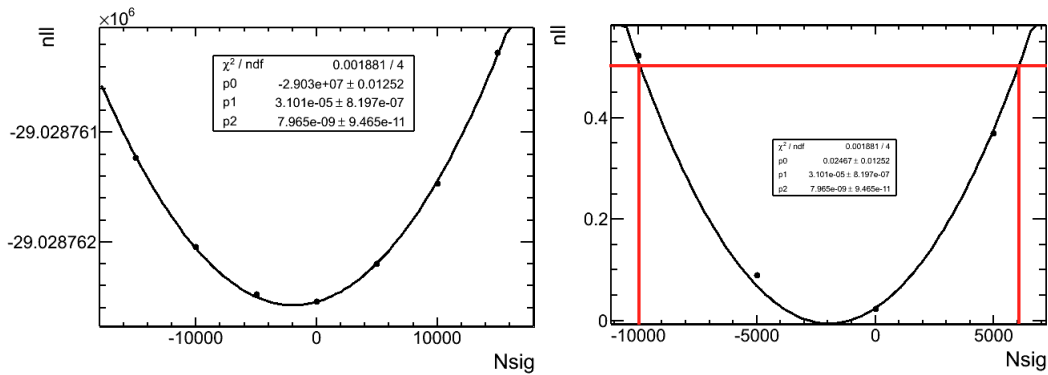


Figura 5.3: Profile del negative log likelihood in funzione di N_{sig} , con evidenziato il range a 1σ

5.3 Cross check e sistematiche

In questa sezione vogliamo studiare gli errori sistematici da cui potrebbe essere affetto il valore di N_{sig} e quindi il limite superiore sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$. Le sistematiche si dividono sostanzialmente in due sottogruppi, uno legato alle assunzioni fatte sulla stima del fattore di normalizzazione definito in sezione 3.5 e a quelle fatte nella strategia di fit.

5.3.1 Sistematiche sul fattore di normalizzazione

Nella stima del fattore di normalizzazione abbiamo assunto che l'accettanza di segnale e l'accettanza di fondo fossero uguali, e quindi si semplificassero nel rapporto in Eq. (5.10). Vogliamo quindi stimare quanto inciderebbe sul valore di f se le due accettanze angolari fossero diverse:

$$f = \frac{\langle \varepsilon(E_{true}) \cdot \varepsilon(\cos \theta) \rangle_{bkg}}{\varepsilon_0 \cdot \langle \varepsilon(\cos \theta) \rangle_{sig}} \times \epsilon_{bkg}^{(50,56)}. \quad (5.6)$$

Per quanto riguarda l'accettanza media di segnale scriviamo:

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos \theta) \cdot \varepsilon(\cos \theta) d\cos \theta, \quad (5.7)$$

inserendo le Eq. (4.6) e Eq. (4.7), l'Eq. (5.11) diventa:

$$\varepsilon_0 \cdot \frac{1}{2} (A_1 - A_2). \quad (5.8)$$

Per l'accettanza media del fondo, dal momento che non è possibile la fattorizzazione come per il segnale, dobbiamo riprendere la procedura definita nella sezione 3.5 e cambiare il secondo punto in questo modo:

1. Generiamo N_{gen} di eventi distribuiti secondo lo spettro di Michel teorico;
2. Ogni evento è accettato con una probabilità proporzionale $\frac{\varepsilon(E_{true}) \cdot \varepsilon(\cos \theta)}{\varepsilon_0}$;
3. Ad ogni valore di energia aggiungiamo una distorsione distribuita secondo la funzione di risoluzione in energia
4. Contiamo il numero di eventi tra 50 e 56 MeV , N_{acc} ;
5. Determiniamo il fattore $f = \frac{N_{acc}}{N_{gen} \frac{1}{2} (A_1 - A_2)}$.

$$f_\theta = 0.087.$$

Confrontando questo valore ¹ con quello ottenuto nella sezione 3.5 stimiamo l'errore sistematico:

$$\Delta f_{sys}^\theta = |f_\theta - f| = 0.0014.$$

Un altro errore sistematico che si può stimare sul fattore di normalizzazione è legato ai parametri della funzione di risoluzione e ai parametri dell'accettanza in energia. In tal caso possiamo procedere aumentando e diminuendo un parametro alla volta di una sigma e stimare rispettivamente i valori di f_+ e f_- .

In questa procedura trascuriamo le correlazioni tra i parametri della funzione di risoluzione, in quanto risultano molto piccole. Per quelli di accettanza assumiamo una correlazione del 100% (vedi paragrafo 4.1.2), di conseguenza otterremo un solo errore sistematico . In Tabella 5.1 sono riportati i valori di f corrispondenti al parametro variato.

¹Questo valore è stato calcolato assumendo una polarizzazione del muone pari $P_\mu = 1$.

<i>Parametro</i>	Δf_{sys}
f_{core}	0.00006
μ	0.00007
σ	0
σ_{tail}	0.00002
f_{out}	0.0003
μ_{out}	0.00007
σ_{out}	0.00005
acc	0.0004

Tabella 5.1: Errori sistematici introdotti variando di 1σ i parametri della funzione di risoluzione.

Sommando in quadratura tutti gli effetti otteniamo:

$$\Delta f_{sys} = 0.0015.$$

5.3.2 Sistematiche sul valore di N_{sig}

Gli errori sistematici sul valore di N_{sig} dipendono dalle assunzioni fatte sullo spettro e dalla strategia di fit, in particolare dal numero di bin in energia, dal range di fit e dai valori di alcuni parametri che non sono lasciati liberi nel fit di massima verosimiglianza. Inoltre, fino ad ora abbiamo assunto un'accettanza angolare simmetrica in $\cos\theta$. E' quindi importante stimare l'effetto che un'accettanza asimetrica, come quella ricavata nella sezione 4.2, ha sul valore di N_{sig} .

Per i parametri della funzione di risoluzione e di accettanza in energia procederemo come per il fattore di normalizzazione:

- per l'accettanza angolare ripetiamo il fit, inserendo nello spettro di Michel il contributo del rapporto di integrali $R + \sigma_R$, poi quello con $R - \sigma_R$ e stimiamo la sistematica come deviazione media di N_{sig} in questi nuovi fit rispetto al fit originale $\Delta N_{sig} = \frac{|N_{sig}^+ - N_{sig}^{fit}| + |N_{sig}^- - N_{sig}^{fit}|}{2}$;
- per il numero di bin, facciamo prima il fit con 100 bin in energia, poi con 110 bin, ci calcoliamo poi l'errore sistematico su N_{sig} come $|N_{sig}^{100} - N_{sig}^{110}|$;
- per il range in energia facciamo il fit dapprima nel range $50 MeV < E < 56 MeV$ e poi nel range $49.5 MeV < E < 56.5 MeV$, infine calcoliamo l'errore sistematico come $|N_{sig}^{[40,60]} - N_{sig}^{[50,56]}|$;
- Per gli outliers ($\mu_{out}, \sigma_{out}, f_{out}$) procediamo come per l'accettanza angolare
- Per i parametri di accettanza stimiamo un solo errore sistematico, in quanto, come già detto, li assumiamo correlati al 100%.

Nella Tabella 5.2 sono riportati gli errori sistematici.

<i>Parametro</i>	ΔN_{sys}
R	27
bin	475
$Range$	697
f_{out}	636
μ_{out}	1111
σ_{out}	183
acc	3302

Tabella 5.2: Errori sistematici sul valore di N_{sig} , relativi a 2700000 eventi di fondo.

Sommando questi errori in quadratura otteniamo:

$$\Delta N_{sig}^{sys} = 3645.$$

5.3.3 Studio dei parametri di risoluzione in funzione di θ e ϕ

Fino a questo punto lo spettro è stato integrato su tutto l'angolo solido. Uno studio dello spettro di Michel in funzione degli angoli θ e ϕ permette di individuare eventuali errori sistematici e risalire a difetti dell'apparato come ad esempio il disallineamento delle camere a deriva rispetto alla posizione nominale.

In Figura 5.4 sono riportate le distribuzioni degli eventi in funzione di θ , (ϕ) e dell'energia del positrone, relativi alla simulazione MC con le camere nella posizione nominale.

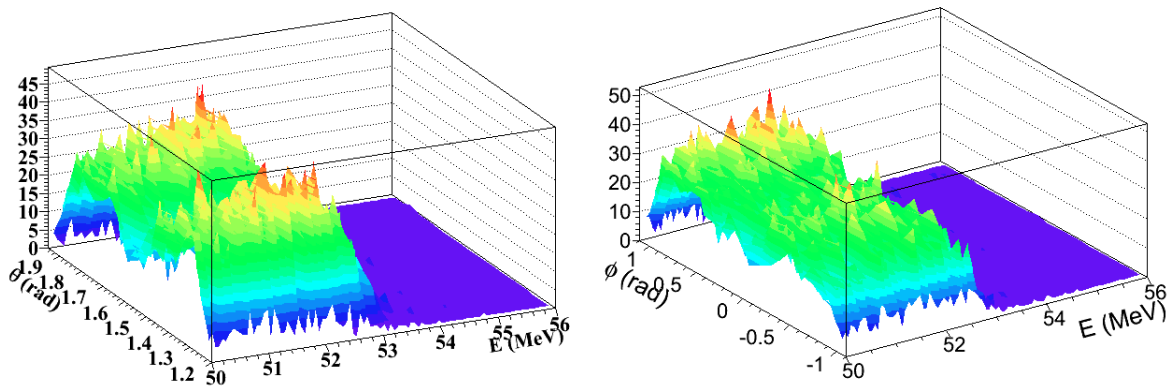


Figura 5.4: Distribuzione in θ (20 bin) e E del positrone (sinistra). Distribuzione in ϕ (20 bin) e E del positrone (destra).

La proiezione sull'asse x dei plot in Figura 4.15 coincide con lo spettro di Michel discusso in precedenza, mentre la proiezione sull'asse y fornisce le distribuzioni angolari rispettivamente in θ e ϕ , riportate in Figura 5.5.

La mancanza di eventi nella distribuzione in θ per $1.4 < \theta < 1.7$ rad è legata ad una inefficienza nella ricostruzione della traccia per positroni di basso impulso longitudinale [20]. Nella distribuzione in ϕ , il picco che si presenta per valori positivi dell'angolo è dovuto a una distribuzione non uniforme del materiale del rivelatore sul cammino del positrone e dunque a una diversa efficienza di trigger da parte del TC in funzione di phi.

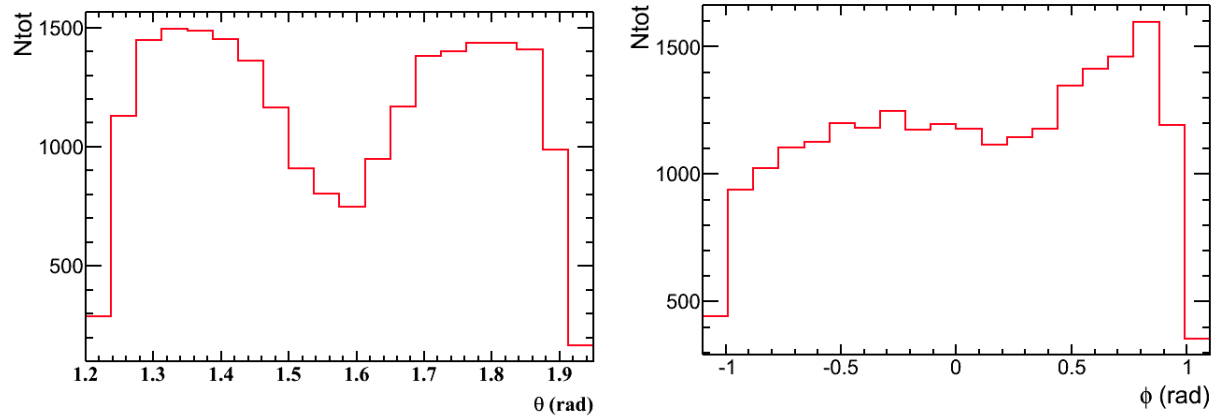


Figura 5.5: Distribuzione in θ del positrone di Michel (sinistra). Distribuzione in ϕ del positrone di Michel (destra).

Per la stima dei parametri della funzione di risoluzione procediamo come segue (il procedimento è lo stesso sia per θ che per ϕ):

1. Facciamo un fit sullo spettro in energia integrato su tutto l'angolo solido
2. Definiamo un numero di bin di θ (ϕ), per ognuno dei quali costruiamo lo spettro in energia del positrone
3. Per ogni bin fittiamo lo spettro fissando i parametri ai valori ricavati dal fit sullo spettro integrato e lasciando liberi solo μ_{core} e σ_{core} , parametri di cui vogliamo studiare la dipendenza da θ e da ϕ .
4. Per ogni parametro grafichiamo i valori ottenuti dai fit in funzione del valore centrale del bin angolare.

La scelta del numero di bin angolari è tale da mantenere sufficientemente alta la statistica per il fit bin per bin. Di seguito riportiamo qualche plot della media (μ_{core}) e della risoluzione (σ_{core}) in energia, in funzione di θ e ϕ .

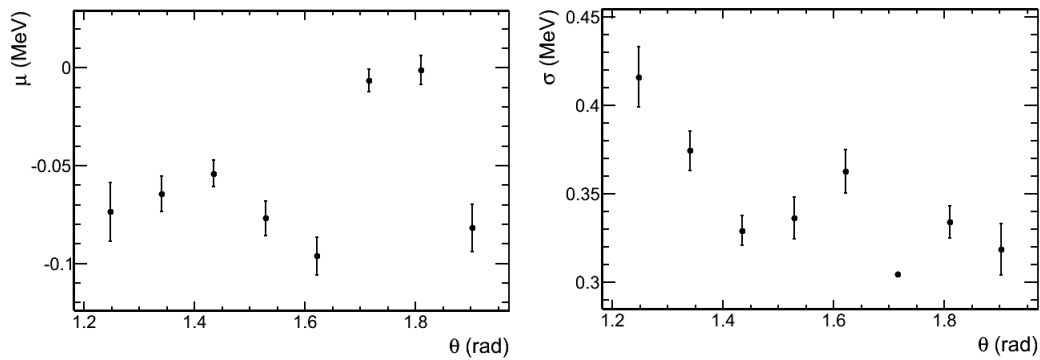


Figura 5.6: Media della risoluzione in funzione di θ (sinistra). Risoluzione (sigma) in funzione di θ (destra).

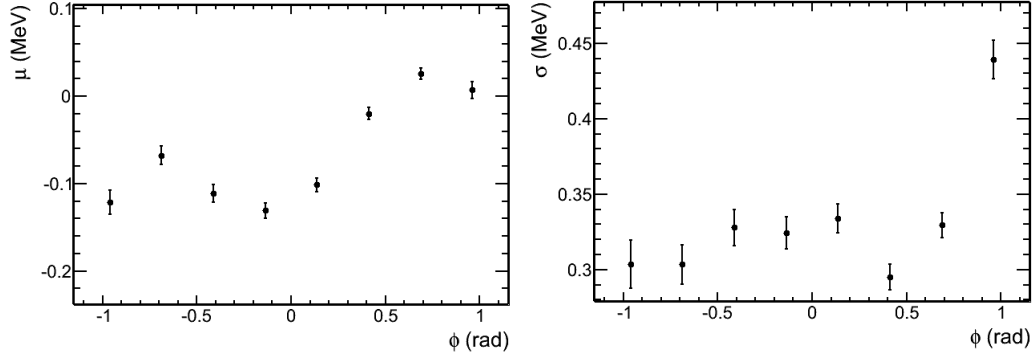


Figura 5.7: Media della risoluzione in funzione di ϕ (sinistra). Risoluzione (sigma) in funzione di ϕ (destra).

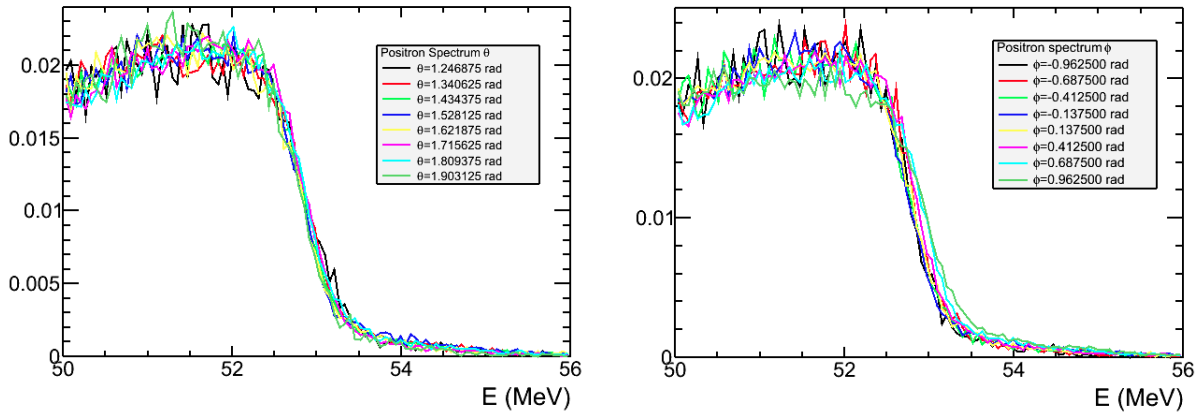


Figura 5.8: Spettro in energia per diversi bin di θ (sinistra) e ϕ (destra).

Le Figure 5.6, 5.7 e 5.8 si riferiscono ai dati del 2009 riprocessati assumendo un campo magnetico dello spettrometro calcolato attraverso le equazioni di Maxwell, note le correnti dei magneti.

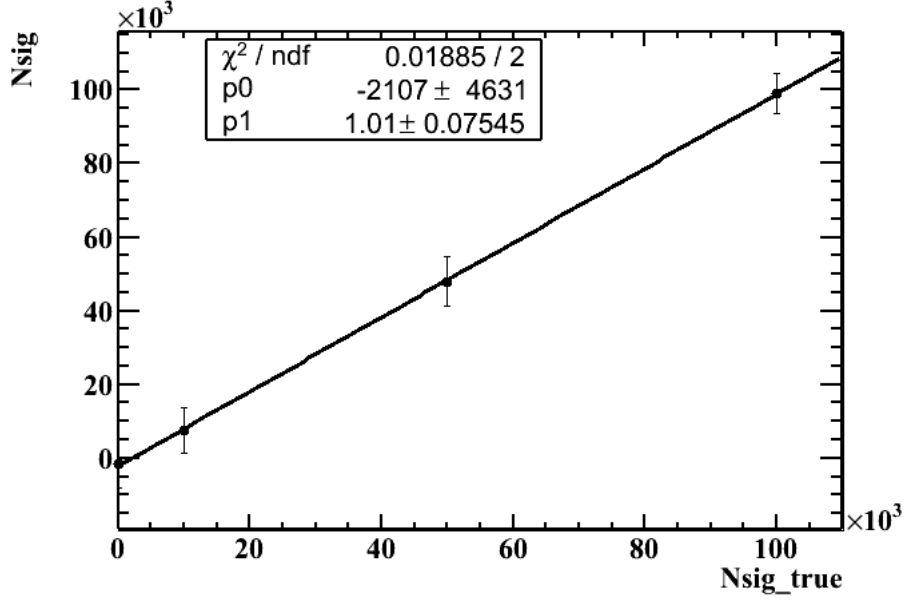
Notiamo delle dipendenze dei parametri dagli angoli, sia θ che ϕ . In Figura 5.6 notiamo che in bin di θ il massimo spostamento di μ_{core} è di circa 100 keV, mentre in bin di ϕ di circa 140 KeV. Questo si traduce in uno spostamento dell'edge di Michel ($E = \frac{m_\mu}{2}$) più visibile in bin di ϕ che in bin di θ (Figura 5.8).

Questa procedura permette di capire e riprodurre, tramite simulazione Monte Carlo, eventuali disallineamenti delle camere a deriva o incertezze sistematiche nella misura del campo magnetico.

In futuro verrà elaborata una strategia per trattare in questa analisi il problema delle dipendenze dello spettro da theta e phi.

5.3.4 Controllo della linearità dell'analisi dai toy Monte Carlo

Al fine di identificare un eventuale bias dell'analisi, variamo, nel toy MC, il numero di eventi di segnale con cui generiamo il campione. per ogni toy grafichiamo il valore medio di N_{sig} in funzione del valore vero N_{sig}^{true} , in Figura 5.9.

Figura 5.9: Grafico N_{sig} vs N_{sig}^{true}

Notiamo che la retta in Figura 5.9 è consistente con la retta di equazione $x = 1$, quindi possiamo concludere che non ci siano bias nell'analisi.

5.4 Limite superiore atteso sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$

In questa sezione vogliamo dare una stima del limite superiore sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ atteso, ipotizzando 12 giorni di presa dati dedicata per il trigger 22. A tal fine utilizziamo la stessa procedura descritta nella sezione 5.1, inserendo questa volta un nuovo valore del numero di eventi attesi nell'intervallo $50 \text{ MeV} < E < 56 \text{ MeV}$ e gli errori sistematici, sommati in quadratura all'errore statistico, su f e N_{sig} ottenuti nella sezione precedente.

Il valore del numero di eventi attesi lo calcoliamo in questo modo:

$$N_{exp} = R^{(50,56)}(t \cdot rate_{trg22} \cdot \epsilon_{reco}), \quad (5.9)$$

dove il fattore² $R^{(50,56)} = 0.53$ è un fattore dovuto al fatto che facciamo il fit nell'intervallo $50 \text{ MeV} < E < 56 \text{ MeV}$, t è il tempo in secondi corrispondente a 12 giorni di presa dati, $rate_{trg22}$ è la rate del trigger 22 pari a 30 Hz, dal momento che il DAQ non può processare più di 30 eventi al secondo, e $\epsilon_{reco} = 70\%$ è la probabilità di ricostruzione di un evento del trigger 22 (effetti combinati di accettazione delle camere e trigger che vengono da muoni decaduti fuori dal bersaglio). Otteniamo quindi un valore $N_{exp} = 11539584$, che assumiamo come valore vero di eventi di fondo N_{bkg}^{true} , avendo posto $N_{sig}^{true} = 0$.

In Figura 5.10 sono riportati una posterior relativa ad un singolo toy MC con gli integrali al 68% e al 90% di PL, e la distribuzione dei limiti superiori rispettivamente al 68% e al 90% del

²Questo fattore è un valore medio osservato facendo il rapporto fra il numero di eventi nell'intervallo $50 \text{ MeV} < E < 56 \text{ MeV}$ e il numero di eventi nell'intervallo $40 \text{ MeV} < E < 60 \text{ MeV}$, che è l'intervallo di energia selezionato dal trigger 22.

PL, ottenute seguendo la strategia di fit definita nella sezione 5.2. Otteniamo rispettivamente i seguenti limiti superiori medi:

$$< BR UL > = 1.1 \cdot 10^{-4} @ 68\% PL$$

$$< BR UL > = 1.5 \cdot 10^{-4} @ 90\% PL$$

Come possiamo notare la posterior sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ in Figura 5.10 risulta larga, effetto causato dall'introduzione degli errori sistematici, ma soprattutto dal vincolo che mettiamo sul parametro μ_{core} , fortemente correlato con il valore di N_{sig} (Figura 5.1). Infatti calcolando gli errori sistematici su N_{sig} provenienti dai parametri f_{core} , σ_{core} , σ_{tail} e μ_{core} , seguendo la procedura descritta in sezione 5.3, avendo assunto come errore $\sigma_{Mott} = 0.01 MeV$, l'errore da μ_{core} va da 42000 per 12 giorni di presa dati, fino a circa 10^5 per 60 giorni di presa dati.

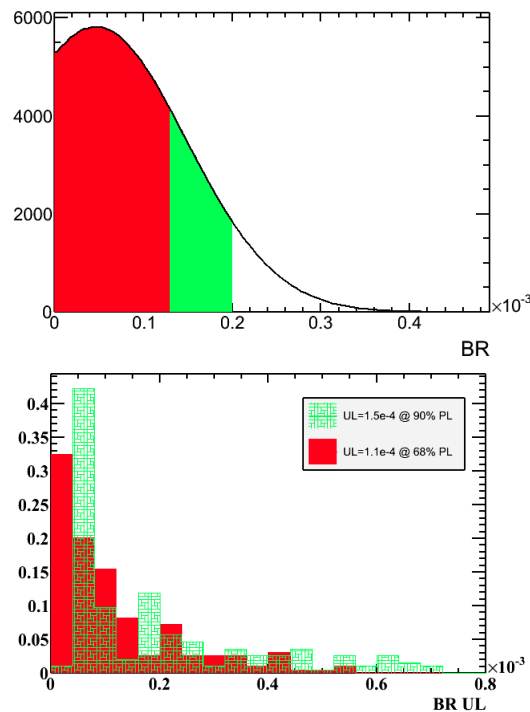


Figura 5.10: Posterior del $BR(\mu \rightarrow eJ)$ relativa ad un toy MC (sinistra). Distribuzioni dei limiti superiori sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ al 68% e al 90% di probability level, ottenuti dai diversi toy MC. Nella legenda sono riportati i valori dei limiti superiori attesi. (destra)

Seguendo la procedura adottata dalla collaborazione TWIST, ci ricaviamo i valori dei parametri μ_{core} , σ_{core} , σ_{tail} e f_{core} , nell'ipotesi di fondo nullo, dallo stesso campione dal quale vogliamo misurare il limite superiore (unblind analysis), questo diminuisce con la statistica a disposizione come in Figura 5.11. Notiamo che già con 12 giorni di presa dati di trigger 22 possiamo ottenere un limite più basso di quello ottenuto dalla collaborazione TWIST.

Notiamo inoltre in Figura 5.11, che la discesa del valore del limite superiore non è repentina con l'aumentare della statistica in quanto è compensata dall'aumento dell'errore sistematico su N_{sig} .

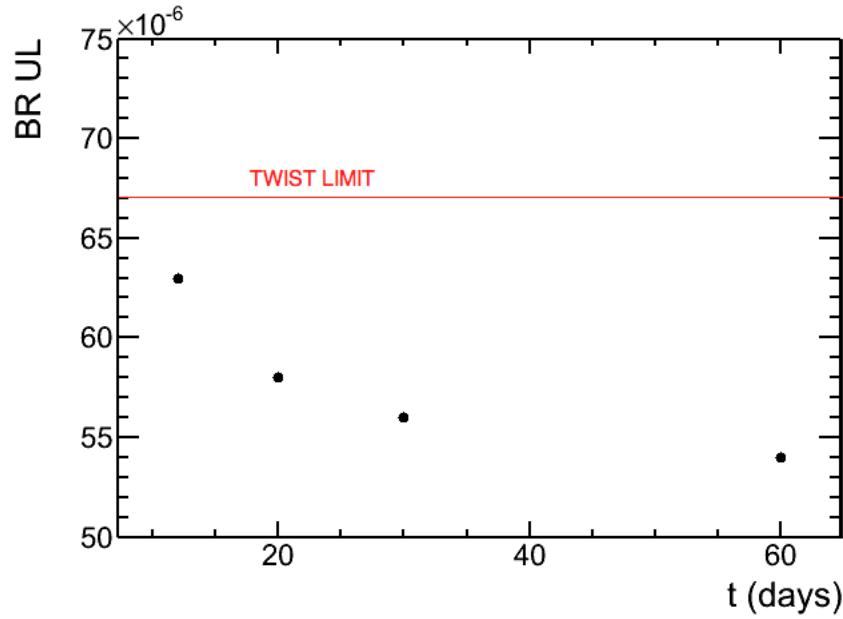


Figura 5.11: Valori dei limiti superiori attesi sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ @ 90% PL in funzione dei giorni di presa dati di trigger 22, relativi all'analisi alla TWIST. La linea rossa delimita il valore ottenuto da TWIST.

Tuttavia questa procedura non presuppone alcuna conoscenza esterna dei parametri della funzione di risoluzione, di conseguenza il risultato potrebbe essere fortemente affetto da bias. Procedendo invece con la nostra strategia, notiamo in Figura 5.12 che, per ottenere un limite superiore più basso di quello ottenuto dalla collaborazione TWIST, il tempo di presa dati deve essere prolungato apiù di 30 giorni.

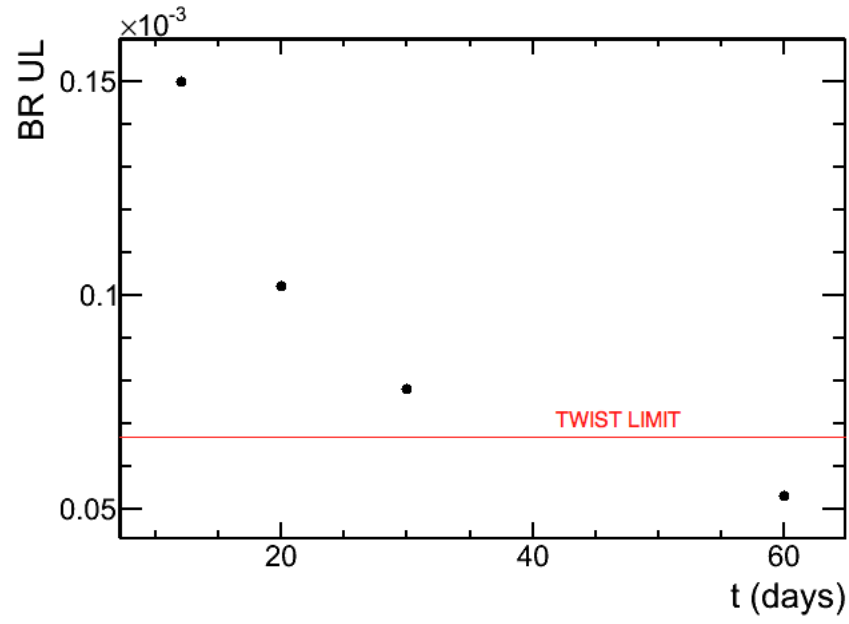


Figura 5.12: Valori dei limiti superiori attesi sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$ @ 90% PL in funzione dei giorni di presa dati di trigger 22, relativi alla nostra analisi. La linea rossa delimita il valore ottenuto da TWIST.

Conclusioni

In questa tesi abbiamo mostrato uno studio di fattibilità della ricerca del canale $\mu \rightarrow eJ$ con l'esperimento MEG, sviluppando una strategia di analisi basata sullo studio dello spettro in energia del positrone nello stato finale del decadimento del muone. Dopo aver individuato che il principale fondo è costituito da positroni di alta energia, provenienti dal decadimento $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$, abbiamo introdotto un modello dello spettro in energia del positrone, costituito da una componente di fondo e una componente di segnale, e ne abbiamo descritto i parametri, soffermandoci sui diversi effetti di risoluzione in energia, di accettazione angolare e in energia. Successivamente abbiamo effettuato un primo test del modello, effettuando un fit di massima verosimiglianza (con il metodo dell'extended likelihood) allo spettro ricostruito di diversi esperimenti simulati (toy Monte Carlo). Conseguentemente abbiamo studiato i parametri dello spettro utilizzando sia un campione di dati che degli eventi Monte Carlo. Inoltre, grazie ai primi eventi di scattering Mott, siamo stati in grado di ricavare l'accettazione angolare necessaria ai fini dello studio di alcuni errori sistematici.

Abbiamo definito poi una procedura, basata su un approccio Bayesiano, che ci permettesse di ricavare il limite superiore atteso sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$. Siamo passati successivamente alla definizione di una strategia di fit dello spettro al fine di stimare la frazione di eventi di segnale. Tuttavia non abbiamo potuto dare un valore del limite superiore sul $BR(\mu \rightarrow eJ)$, dal momento che attualmente siamo limitati dalla mancanza di un presa dati ad hoc per la ricerca del Majorone, come proposto nella sezione 5.4, e dal fatto che la strategia di fit si basa su una conoscenza dei parametri di risoluzione in energia proveniente dall'analisi degli eventi di scattering Mott, per i quali si è ancora in una fase preliminare. Proprio in questo periodo sono in atto dei test di calibrazione con i positroni provenienti dallo scattering Mott. Possiamo fare delle proposte finalizzate a raffinare la ricerca del Majorone in MEG:

- L'accettazione angolare dovrà essere ricalcolata non appena saranno disponibili più eventi di scattering Mott.
- Una prolungata acquisizione di eventi di trigger 22 può fornire una statistica significativa per ottenere un limite superiore competitivo con quello ottenuto dalla collaborazione TWIST, assumendo la stessa distribuzione angolare del segnale ($1 - \cos\theta$), la stessa polarizzazione dei muoni del fascio e avendo incluso gli errori sistematici. Volendo fare una analisi unblind, con pochi giorni di presa dati, potremmo ottenere un limite superiore

$BR(\mu \rightarrow eJ)$ più basso di quello ottenuto dalla collaborazione TWIST : $6.2 \cdot 10^{-5}$ @ 90% PL con soli 12 giorni di presa dati dedicata.

- Utilizzare una procedura basata su un approccio frequentista come cross check del risultato
- Perfezionare lo studio degli errori sistematici sul valore di N_{sig} .
- Elaborare una strategia per trattare, in questa analisi, il problema delle dipendenze dello spettro da theta e phi.
- Nel capitolo 1 abbiamo accennato al fatto che il Majorone potrebbe acquistare una massa nel processo di rottura spontanea della simmetria, di conseguenza sarebbe interessante effettuare dei fit sullo spettro del positrone introducendo la massa del Majorone come parametro.

Appendice A

Ricostruzione della traccia del positrone

La ricostruzione della traccia del positrone nello spettrometro viene effettuata nel modo seguente:

- Identificazione delle coordinate dell' hit della traccia
- Ricerca dei cluster e della traccia
- Fit della traccia

Identificazione delle coordinate dell'hit

Per ogni cella elementare interessata dalla ionizzazione ci sono sei forme d'onda: due dalle estremità del filo, quattro sui fogli catodici in alluminio che costituiscono il pattern di Vernier. Un hit viene definito tale quando l'impulso elettrico è superiore a tre volte l'RMS del rumore. A questo hit vengono successivamente associati una carica Q , ottenuta integrando l'impulso in una finestra temporale di 75 ns intorno al picco tale da massimizzare il rapporto segnale-rumore, e un tempo t corrispondente al primo valore di tempo per cui l'impulso è sopra soglia.

Considerando la carica raccolta alle due estremità del filo, è possibile dare una prima stima della posizione in z . Definendo la seguente asimmetria di carica anodica:

$$A_A = \frac{Q_{UA} - Q_{DA}}{Q_{UA} + Q_{DA}}, \quad (5.10)$$

la coordinata in z dell'hit è:

$$z = (1 + A_a) \frac{L}{2} \quad (5.11)$$

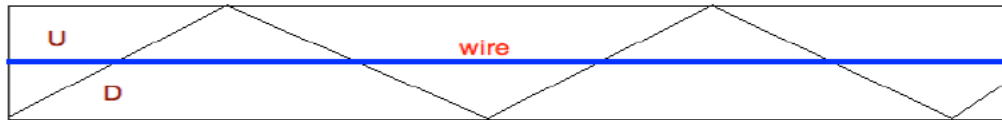


Figure 5.13: Schematizzazione del pattern di Vernier

La struttura periodica dei catodi di alluminio permette di raffinare la misura della coordinata z dell'hit, attraverso un processo di induzione elettrica, prodotta dal passaggio della particella. Questa carica è calcolabile tramite il metodo della carica immagine [16]. Per uno dei catodi abbiamo:

$$Q_{UC} \propto \frac{1 + \cos(\frac{2\pi z}{L_p})}{2}, \quad Q_{DC} \propto \frac{1 - \cos(\frac{2\pi z}{L_p})}{2}, \quad (5.12)$$

e per il catodo opposto *hood* :

$$Q_{UH} \propto \frac{1 + \sin(\frac{2\pi z}{L_p})}{2}, \quad Q_{DH} \propto \frac{1 - \sin(\frac{2\pi z}{L_p})}{2}, \quad (5.13)$$

dove con U e D indichiamo i due film di alluminio a dente di sega che sovrapposte danno il pattern completo come in Figura 5.13, $L_p = 5cm$ la lunghezza del periodo e z è la coordinata lungo il fascio. Per l'anodo e per l'hood possiamo definire, a partire dall'Eq. (5.14) e dall'Eq. (5.15), le asimmetrie di carica:

$$A_H = \frac{Q_{UH} - Q_{DH}}{Q_{UH} + Q_{DH}} = \sin\left(\frac{2\pi z}{L_p}\right), \quad (5.14)$$

$$A_C = \frac{Q_{UC} - Q_{DC}}{Q_{UC} + Q_{DC}} = \cos\left(\frac{2\pi z}{L_p}\right). \quad (5.15)$$

Graficando le due asimmetrie di carica si ottiene un cerchio (Figura 5.14), detto di Vernier.

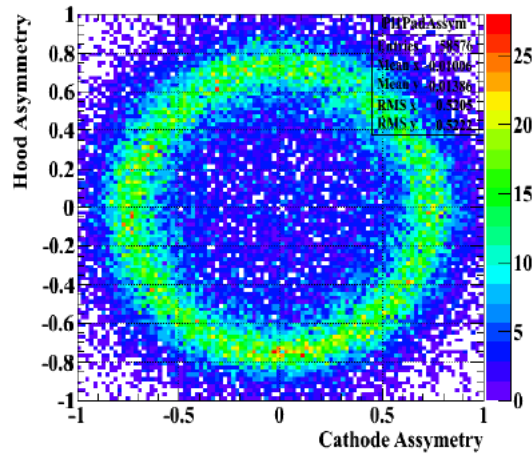


Figure 5.14: Cerchio di Vernier

Dalle due asimmetrie di carica A_H e A_C ci ricaviamo la fase del pattern di Vernier $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_H}{A_C}\right)$ e scriviamo la posizione in z come:

$$z = \alpha \cdot \frac{L_p}{2\pi} + nL_p \quad (5.16)$$

Misurando il raggio e la risoluzione di questo, è possibile ricavare la risoluzione in z :

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \sigma_R \frac{L}{R}. \quad (5.17)$$

Questo metodo definisce la posizione z nel periodo di pattern di lunghezza L_p , quindi rimane una degenerazione di periodo (n). Confrontando il valore ricavato con l'Eq. (5.13) e quello ricavato con l'Eq. (5.18), è possibile determinare il periodo n .

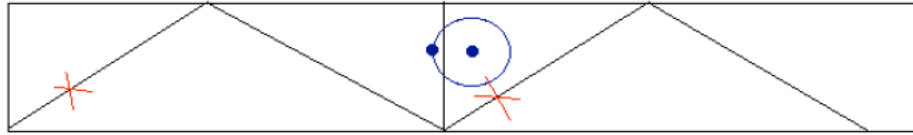


Figure 5.15: Hit del positrone sul filo e degenerazione di periodo del pattern.

In Figura 5.15 le crocette rosse sono gli hit provenienti dalla misura con il metodo del pattern di vernier, mentre in blu l'hit del filo (anodo). Il periodo selezionato è quello per cui la differenza tra l'hit del filo e del pattern risulta minima. Posso commettere al più un errore pari alla lunghezza di un periodo (Figura 5.16).

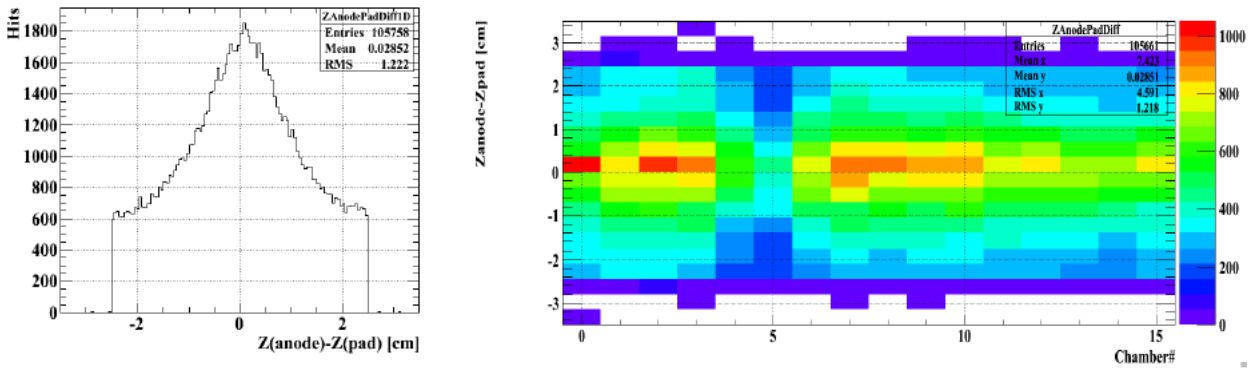


Figure 5.16: Proiezione sull'asse $Z(\text{anode})-Z(\text{pad})$ (sinistra). $Z(\text{anode})-Z(\text{pad})$ in funzione del numero della camera a drift (destra)

Si prende il tempo del positrone al TC per definire il tempo della traccia e si sottrae al tempo dell'hit per ottenere il tempo di drift t ; a questo punto si può risalire ad una determinata curva isocrona compatibile con t (Figura 5.17(a)), ma la determinazione univoca della coordinata r dell'hit richiede la conoscenza della direzione della traccia. Questa infatti consente sia di risolvere l'ambiguità destra-sinistra, sia di determinare univocamente il punto di origine della valanga di ionizzazione, attraverso la stima del punto di tangenza con l'isocrona. Per questi motivi, la coordinata r dell'hit viene calcolata solo dopo aver ottenuto una prima stima della direzione della traiettoria del positrone.

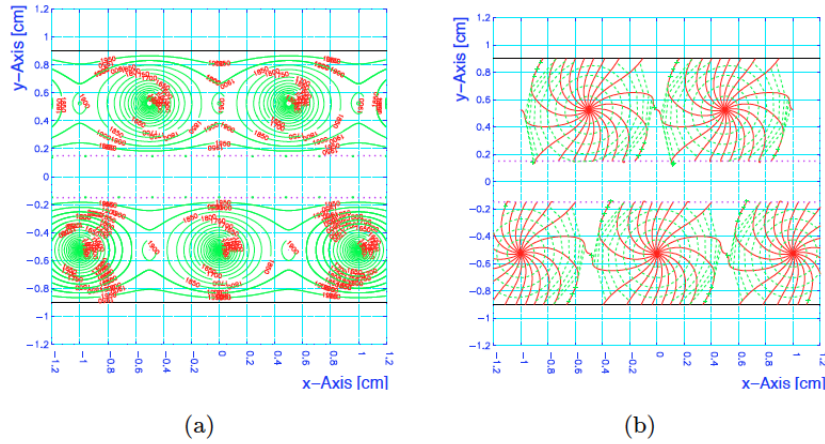


Figure 5.17: Diverse isocrone (a).Linee di deriva intorno ai fili catodici (b)

Ricerca dei cluster e della traccia

Ogni modulo delle camere a deriva è formato da piani adiacenti di fili anodici, sfasati di metà cella. All'interno di uno stesso modulo, è possibile raggruppare gli hits compatibili con un'unica traccia, e formare i cluster (Figura 5.18). A questo punto, grazie allo sfasamento di metà cella, si risolve l'ambiguità destra-sinistra nella maggior parte dei casi. La ricerca delle tracce consiste nell'individuazione di cluster compatibili con un'unica traccia, su moduli differenti (Figura 5.19). Tale procedura fornisce diverse porzioni di traccia che in un secondo momento verranno connesse per formare le tracce candidate. Nota a questo punto la direzione della traccia, si determina univocamente la coordinata r e viene risolta l'ambiguità destra-sinistra.

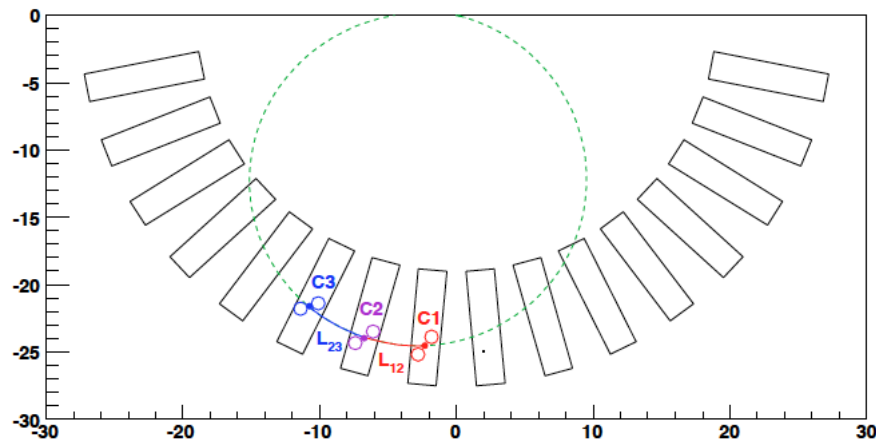


Figure 5.18: Ricostruzione di una porzione di traccia, mediante l'identificazione dei cluster C1, C2 e C3

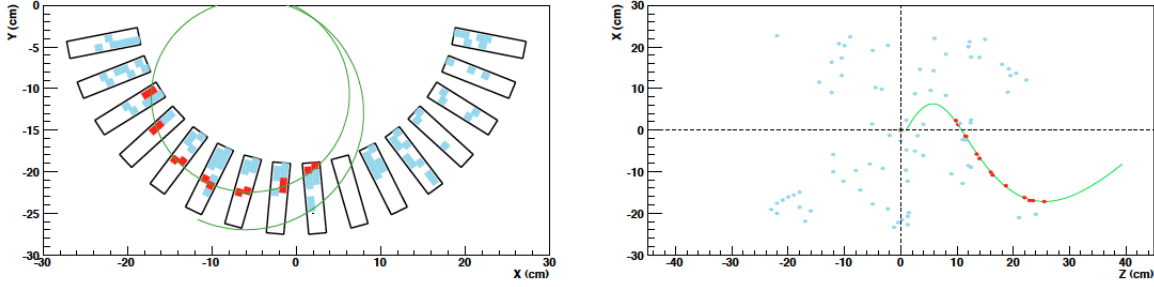


Figura 3.4: Esempio di traccia candidata nel piano x-y (a sinistra) e nel piano z-x (a destra).

Figure 5.19: Esempio di traccia candidata nel piano x-y (sinistra) e nel piano z-x (destra)

Fit delle tracce

La traccia candidata viene analizzata con precisione da un algoritmo di fit basato su un Kalman Filter. Questa tecnica permette di includere nell'algoritmo, in modo ottimale, la perdita di energia e la diffusione coulombiana, la manipolazione di traiettorie in geometrie complesse e in campi magnetici non uniformi, e la gestione e il controllo della propagazione degli errori, tutte caratteristiche necessarie per MEG.

Si può fare l'analogia fra l'analisi lineare di un sistema dinamico e il fit di una traccia, introducendo un vettore X , inteso come l'evoluzione della traccia, a sei componenti, tre per la posizione, due per la direzione e una per il modulo dell'impulso. Il fit consiste nella risoluzione del sistema di equazioni:

$$x_k = F_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1}, \quad (5.18)$$

dove k scorre sugli N hit a disposizione, F è il propagatore della traccia dalla $k-1$ -esima alla k -esima misurazione, w è un disturbo random che tiene conto delle fluttuazioni dovute alla perdita di energia e della diffusione coulombiana. In un campo magnetico non uniforme come quello generato dal COBRA il propagatore F non è lineare e al suo posto mettiamo lo sviluppo al primo ordine:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}^{k-1}) + J_{k-1}(x_{k-1} - x_{k-1}^{k-1}) + w_{k-1}, \quad (5.19)$$

dove J è la matrice Jacobiana di f . Il propagatore della traccia contiene un preciso modello di traiettoria per il tracciamento di una particella carica all'interno di COBRA, che richiede di inglobare in questo sistema una mappa di misurazioni del campo magnetico. Il sistema si risolve attraverso le seguenti operazioni:

- Stima di x_k basata su tutte le precedenti misurazioni, esclusa la k -esima (Filtering)
- Stima di x_k comprendendo anche la k -esima. In questo modo aggiorniamo l'informazione sul vettore di stato X con un'opportuna media pesata tra le precedenti misure e la k -esima (Prediction)

- Stima di x_k con tutte le N misurazioni. La traccia viene propagata all'indietro verso il bersaglio (Smoothing).

A questo punto è possibile determinare le componenti del vettore di stato.

Criteri di selezione della traccia

La traccia del positrone viene selezionata facendo dei tagli sulle coordinate spaziali nelle camere (DC) e nei cluster del timing counter (TIC) proiettate su un piano a ϕ fissato. Definiamo Z_{DC} la coordinata z della traccia nelle camere, R_{DC} la coordinata r nelle camere, Z_{TIC} la coordinata z in una barra del Timing Counter e R_{TIC} la coordinata r della barra del Timing Counter. I criteri di selezione sono elencanti di seguito:

- $|R_{DC} - R_{TIC}| < 10 \text{ cm}$
- $|Z_{DC} - Z_{TIC}| < 30 \text{ cm}$

Le distribuzioni di queste differenze sono riportate in Figura 5.20. Il vincolo sul matching tra le camere a deriva e il TC è allargato a 4σ della distribuzione, al fine di tenere in conto quelle tracce la cui proiezione sul TC è degradata dalla perdita di energia dovuta al passaggio attraverso il materiale delle camere a deriva. Queste tracce in assenza di perdite di energia avrebbero una bassa probabilità di trovarsi lontane dal picco, di conseguenza per questo l'intervallo del taglio viene allargato.

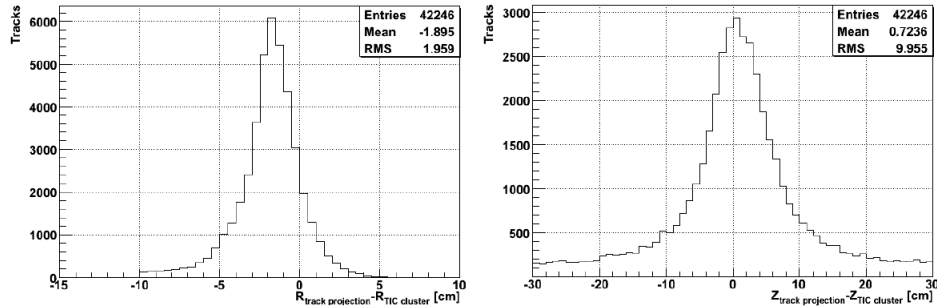
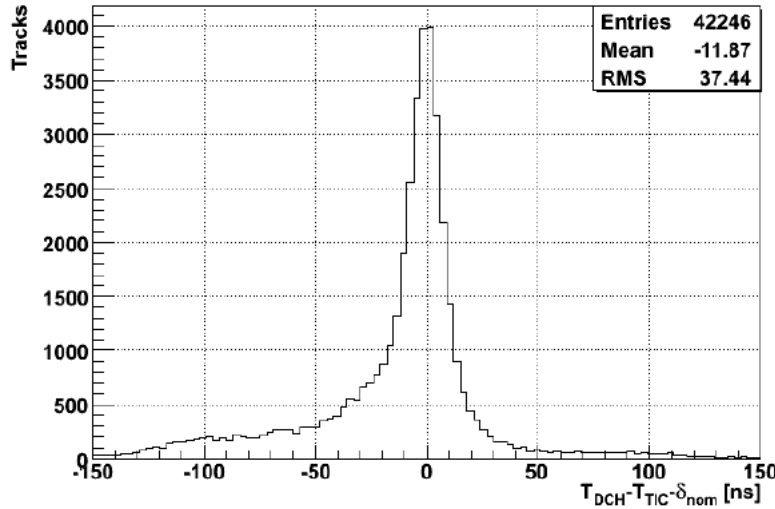


Figura 5.20: Distribuzione di $R_{DC} - R_{TIC}$ (sinistra) e di $Z_{DC} - Z_{TIC}$ (destra)

Figura 5.21: Distribuzione di $T_{TIC} - T_{DC}$

In Figura 5.21 è riportato un ulteriore taglio effettuato sul tempo di arrivo nella traccia e nel TC.

- $|T_{TIC} - T_{DC}| < 30 \text{ ns}$

Questi valori si riferiscono allo studio fatto in [24]. Oltre a questi tagli vi sono anche altre richieste della qualità della traccia riportati in Tabella 5.3.

numero di hit sulle camere della traccia	N_{hits}	> 7
χ^2 della traccia ottenuto con il kalman filter fit	$\chi^2/(2fN - 5)$	< 20
Incertezza sull'energia del positrone	ΔE	$< 1.1 \text{ MeV}$
Incertezza sull'angolo θ stimata dal Kalman filter fit	$\Delta \theta$	$< 0.6^\circ$
Incertezza sull'angolo ϕ stimata dal Kalman filter fit	$\Delta \phi$	$< 1.5^\circ$
Angolo θ della traccia	$ \cos \theta $	$0.08 < \cos \theta < 0.35$
Angolo ϕ della traccia	ϕ	$< 57.3^\circ$

Tabella 5.3: Criteri di selezione della traccia

Questi tagli sono ottimizzati per la ricerca del $\mu \rightarrow e\gamma$. Tuttavia un'ottimizzazione per la ricerca del Majorone è auspicabile ma esula dagli scopi di questa tesi.

Appendice B

Calibrazioni del calorimetro a Xenon liquido

Misura dell'efficienza quantica dei PMT con sorgenti alfa



Figure 5.22: Sorgende di americio

Le efficienze quantiche (QE) dei PMT sono misurate attraverso l'utilizzo di cinque fili di americio, in Figura 5.22, di diametro circa $50\mu m$, posti parallelamente alla direzione del fascio, che emettono radiazione alfa. Essendo la posizione e l'energia emessa dai fili di americio note non sono difficili da simulare. Un confronto del numero di fotoelettroni per PMT ottenuti attraverso simulazioni Monte Carlo e il numero reale registrato in un evento di particella α fornisce una stima della efficienza quantica. La variazione del numero di fotoelettroni in funzione della distanza tra il PMT e le varie sorgenti α consente inoltre di stimare l'assorbimento della luce all'interno del calorimetro, con conseguente monitoraggio delle impurezze disciolte nello Xe .

Calibrazione con LED

Una serie di LED ultravioletti sono installati all'interno del calorimetro al fine di misurare il guadagno dei PMT. Variando l'intensità luminosa dei LED la varianza delle distribuzioni di carica di singolo PMT risulta essere proporzionale al suo guadagno g secondo la relazione:

$$\sigma^2 = g(q - q_0) + \sigma_0^2 \quad (5.20)$$

dove q è la carica del segnale, q_0 è il piedistallo e σ_0 è la varianza del piedistallo. I guadagni sono determinati con un'incertezza inferiore al 4% da cui si può stimare un contributo alla risoluzione in energia del calorimetro inferiore all'1%.

Calibrazione con neutroni

Inserendo una sorgente di $AmBe$ in un involucro di Nichel e CH_2 , attraverso la reazione $^{58}Ni + n \rightarrow ^{59}Ni^* \rightarrow ^{59}Ni + \gamma$, nel 52% dei casi vengono prodotti fotoni da 9 MeV. Questo metodo tuttavia è ancora in fase di miglioramento.

Calibrazione con acceleratore Cockcroft Walton

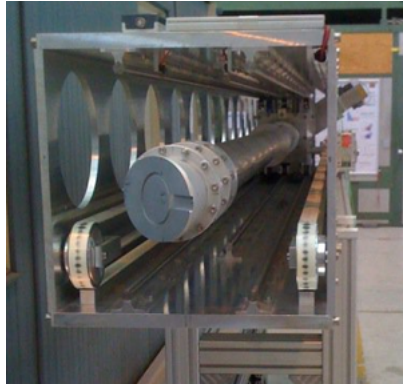


Figura 5.23: Linea di fascio dei protoni

L'acceleratore CW utilizzato da MEG accelera un fascio di protoni che urtano un bersaglio di Fluoruro di Litio. Vengono emessi fotoni da 17.6 MeV (tre volte l'energia ottenuta con le sorgenti alfa), secondo la reazione $p + Li \rightarrow Be + \gamma$ [17], quando l'energia del protone è pari alla risonanza di 440 KeV. Da questa reazione solo i fotoni vengono emessi dal bersaglio, in quanto le altre particelle (alfa, ioni etc) si arrestano nel bersaglio, e non vengono emessi neutroni in quanto l'energia dei protoni è sotto soglia.

Il bersaglio è fissato all'estremità della linea del fascio dei protoni, in Figura 5.23, che, durante la calibrazione, è inserita in modo automatizzato all'interno del COBRA nella posizione del bersaglio per i μ .

Calibrazione con reazione di scambio carica (CEX)

Il π^0 ha spin 0 e decade emettendo, nel 98.8 % dei casi, due fotoni monocromatici di energia pari a 67.49 MeV, emessi isotropicamente nel sistema di riferimento del pione in quiete. I π^0 vengono prodotti attraverso la reazione di scambio carica $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$, con il pione negativo a riposo nel sistema del laboratorio. A tale scopo la linea di fascio $\pi E5$ è manipolata in maniera tale da inviare pioni negativi da 70 MeV/c su un bersaglio di idrogeno liquido, posto in sostituzione al bersaglio per i muoni. Naturalmente questa calibrazione non può essere fatta durante la presa dati, ma ci sono dei run dedicati.

La reazione libera 4 MeV, di conseguenza i pioni neutri non decadono da fermi e lo spettro in energia dei fotoni emessi è piatto:

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{2\beta\gamma(m_{\pi^0}/2)}, \quad (5.21)$$

dove β è il boost del pione neutro. L'energia varia da 54.9 a 82.9 MeV. La relazione tra l'energia del fotone e l'angolo θ tra i fotoni emessi dal π^0 risulta:

$$E_\gamma = \frac{m_{\pi^0}}{2} \gamma \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma^2(1 - \cos \theta)}} \right), \quad (5.22)$$

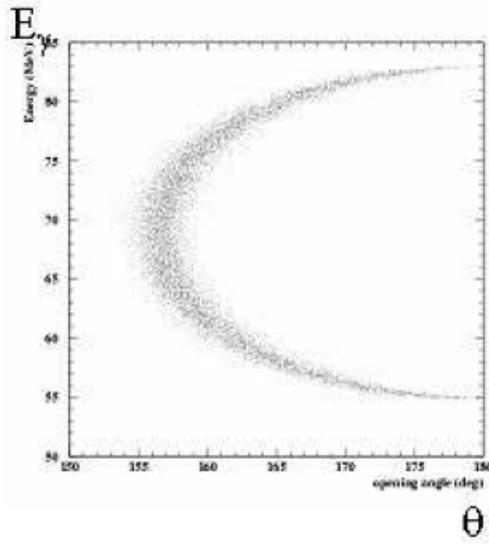


Figura 5.24: Scatter plot della energia dei fotoni in funzione dell'angolo compreso ottenuto attraverso una simulazione dell'apparato sperimentale.

con $\cos \theta > 157^\circ$, Figura 5.24.

Tuttavia questa relazione può essere utilizzata per definire l'energia di un fotone solo quando si determina la posizione dell'altro, nello stesso evento. A tale scopo sul lato opposto al calorimetro a Xenon liquido è installato un calorimetro ausiliario, formato da una matrice di cristalli di NaI. Questo calorimetro è installato su un supporto che ne varia la posizione angolare, in maniera tale da coprire tutta la superficie di ingresso del calorimetro a Xenon liquido.

Intercalibrazione tra calorimetro e TC con laser

L'intercalibrazione del TC e del calorimetro per misure di coincidenza temporale avviene mediante l'utilizzo di un laser a Nb in grado di emettere luce a lunghezze d'onda pari a 532 nm (seconda armonica, utile al TC) e a 266 nm (quarta armonica utile per il LXe) per impulsi di durata di 10 ps. La frequenza di eccitazione del laser può essere scelta tra 100 e 1000 Hz. Il sistema di laser fornisce inoltre un segnale di sincronizzazione relativo all'eccitazione con un jitter inferiore a 5 ps. Il fascio del laser viene diviso ed inviato, attraverso cammini ottici di egual lunghezza e stabili nel tempo, sulla faccia di ingresso del calorimetro, sulle barre del TC e su uno scintillatore accoppiato ad un PMT di riferimento per la normalizzazione dell'intensità del fascio laser. La differenza temporale le salite dei segnali del calorimetro e del TC dà una misura dello sfasamento relativo dei due apparati nella misura del tempo. Un

monitoraggio continuo di tale valore è un ulteriore controllo della capacità di ricostruire ed identificare eventi simultanei con la risoluzione temporale di progetto.

Appendice C

Metodo del χ^2 per la determinazione dei parametri di accettazione in energia

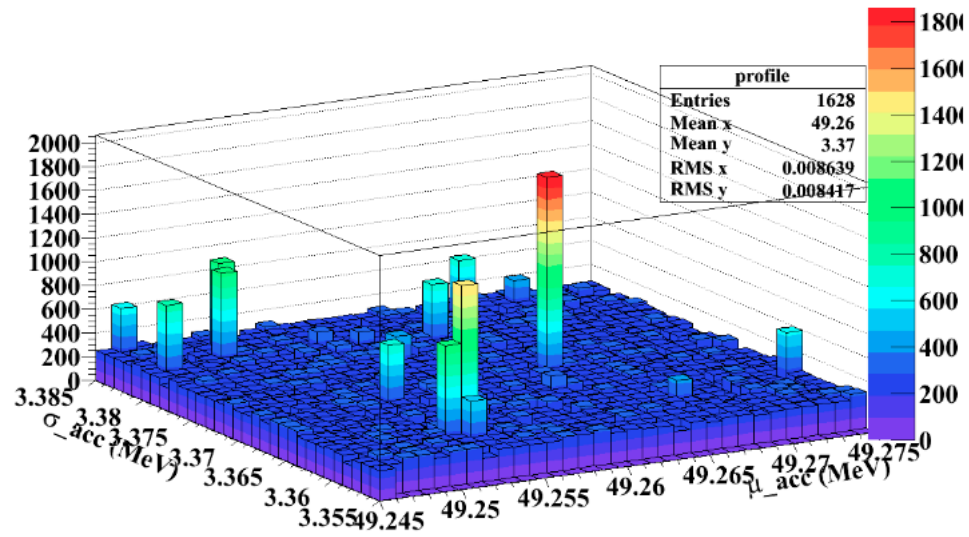
Questo metodo ha lo scopo di ricostruire il profilo della funzione χ^2 nello spazio dei parametri che vogliamo stimare, per poi estrapolarne il minimo. Utilizzando il campione di dati definito in 3.4, procediamo come segue:

- Definiamo un reticolo nello spazio dei parametri μ_{acc} e σ_{acc}
- Per ogni punto del reticolo facciamo un fit di massima verosimiglianza, facendo variare i parametri μ_{core} , f_{core} , σ_{core} e σ_{tail} . Il fit viene fatto sulla prima sideband³ dello spettro dei dati del campione definito in 3.4.
- Per ogni fit determiniamo il valore del χ^2

Lo studio è stato effettuato per diversi valori della dimensione e del passo del reticolo.

Sfortunatamente a causa della scarsa sensibilità della distribuzione nella sideband ai vari parametri del fit, la procedura di minimizzazione mostra una scarsa convergenza, producendo risultati non affidabili, al contrario di quello che si otterrebbe se, in una procedura non blind, si realizzasse il fit sull'intero spettro. In Figura 5.25 notiamo quanto detto, il fit spesso converge in minimi locali senza dare informazioni affidabili su parametri.

³In realtà prendendo la prima sideband larga così come definita in 3.4.2 il χ^2 tendeva a divergere, pertanto abbiamo scelto come criterio di blind di metterci a due volte il valore di sigma come semilarghezza della regione di segnale.

Figura 5.25: Profilo del χ^2 nel piano μ_{acc} σ_{acc}

Ringraziamenti

Questa tesi è dedicata al Professor Roberto Iantorno, il mio docente di matematica del liceo, venuto a mancare il 30 luglio del 2005. Lui ha fatto crescere in me la passione di guardare al mondo con gli occhi della matematica. Per questo un grazie oggi va a lui, che ho sempre sentito vicino.

Naturalmente un grazie al gruppo MEG di Roma : Giancarlo Piredda, Cecilia Voena e i miei relatori Gianluca Cavoto e Francesco Renga. Grazie a voi che mi avete offerto l'opportunità di conoscere MEG da vicino. Grazie infinite a Francesco che ha risposto a tutti i miei dubbi, anche i più banali!

Grazie a tutta la collaborazione MEG, in particolare: Betta, il Sime, il Galli e le sue info sul trigger, Angela che mi ha passato i dati Mott, Giovanni Signorelli, Giovanni Gallucci e....massì pure il santo!

Grazie alla mia famiglia che, tra alti e bassi, non ha mai smesso di credere in me. Grazie alla mia fidanzata Sara, che ha saputo starmi accanto e sopportarmi anche nei momenti di grande pressione, specialmente in questo periplo.

E infine ringrazio tutti i miei amici!

Bibliografia

- [1] Y. Kuno and Y. Okada, Reviews of Modern Physics, Vol. 73, 151 (2001).
- [2] Lewis H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press)
- [3] A.Masiero and J.W.F. Valle, A Model for Spontaneous R-Parity Breacking (1990)
- [4] EA. Danevich et al. ,Nuclear Physics A 643 (1998) 317-328
- [5] M. Hirsch and A. Vicente Physical Review D 79, 055023 (2009)
- [6] G. B. Gelmini and M. Roncadelli, Phys. Lett. B 99, 411 (1981).
- [7] Proposal to PSI: “MEG: Search for $\mu \rightarrow e\gamma$ " down to 10^{-14} branching ratio”; Documents and status at [http:// meg.web.psi.ch/](http://meg.web.psi.ch/). For a status report see, for example: A. Maki, AIP Conf. Proc. 981, 363 (2008).
- [8] A.Jodidio et al. ,Physical Review D ; Vol 4, 37 (1986).
- [9] T. Mori et al., ‘Search for the $\mu \rightarrow e\gamma$ down to 10^{-14} branching ratio’, proposal to PSI (1999).
- [10] T. Mori, “MEG -The Experiment to Search for $\mu \rightarrow e\gamma$ ”
- [11] A. Papa, ‘Misura del fotone di decadimento nell’esperimento MuEGamma mediante la nuova calorimetria a Xenon liquido’, Tesi di laurea, Universit’a di Pisa (2004).
- [12] G. Signorelli, ‘A sensitive search for lepton-flavour violation: the MEG experiment and the new LXe calorimetry’, PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa (2002).
- [13] A. Baldini et al., ‘Liquid Xe scintillation calorimetry and Xe optical properties’ [arXiv:physics/0401072].
- [14] L. Galli, “A real time glance at the Lepton Flavor Violating decay $\mu \rightarrow e\gamma$ in the MEG experiment”, PhD thesis, Università di Pisa (2010).
- [15] E. Chiaverini, “Misura del tempo di volo del positrone nell’esperimento MEG”, Tesi di laurea, Università degli studi di Roma La Sapienza (2011).
- [16] O. Kiselev et al., “Analysis of Drift Chamber Data from the Aquarium Test Station”, PSI (2009).
- [17] A. Baldini, C. Bemporad, F. Ci, M. Grassi, D. Nicolò, A. Papa, R. Pazzi, G. Signorelli, ‘Considerations on the Calibration and Monitoring of the MEG experiment’, (2005).

- [18] G.Cavoto, G. Piredda, C. Voena, F. Renga,” Extraction of the Positron Momentum Resolution from a Maximum Likelihood Fit of the Michel Spectrum” (2009)
- [19] P. W. Cattaneo et al., “The Architecture of MEG Simulation and Analysis Software” (2011).
- [20] A. Baldini et al. ”Muon Polarization in the MEG experiment. Predictions and Measurements” (2011)
- [21] F.Renga, “A Search for the Rare Decays $B \rightarrow K^* \nu \bar{\nu}$ with the BABAR Detector”, PhD Thesis, Università degli Studi di Roma La Sapienza (2008)
- [22] A. Baldini et al., “A Dedicated Positrons Beam and Coherent Mott Scattering on ^{12}C as a Diagnostic Tool for the MEG COBRA Spectrometer”, Internal Note (2010)
- [23] G. Cowan Statistical Data Analysis, Oxford University Press (1998)
- [24] B. Golden, W. Molzon, “A Measurement of the MEG Branching Fraction Normalization”, Internal Note (2008)